

Бібліотека «Шкільного світу»
Заснована у 2003 р.

ШКІЛЬНИЙ
СВІТ
ЕКСПЕРТ
у галузі освіти

Світлана
Скворцова

**СЮЖЕТНІ
ЗАДАЧІ,
ЩО МІСТЯТЬ
СТАЛУ
ВЕЛИЧИНУ**

3—4 класи

Початкова освіта. Бібліотека

Київ
«Редакції газет з дошкільної та початкової освіти»
2013

УДК 373.3.016:811.161.2
ББК 74.268.1Укр
С-42

Редакційна рада:
Т. Комарянська, О. Кондратюк — канд. пед. наук,
Г. Кузьменко, М. Мосієнко — канд. філол. наук, О. Шатохіна

Скворцова С. О.

Сюжетні задачі, що містять сталу величину : 3—4 класи. — К. :
Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2013. — 128 с. —
С-42 (Бібліотека «Шкільного світу»).

ISBN 978-966-451-000-1.

ISBN 978-966-2753-19-6.

У виданні подано зміст авторської методики формування в учнів початкових класів умінь розв'язування задач, що містять однакову (сталу) величину – задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями.

Пропонована методика складена на засадах теорії змістових узагальнень В.В. Давидова та реалізує III-й тип навчання за П.Я. Гальперінім. Навчання розв'язування задач окремих видів здійснюється через всебічне дослідження опорної задачі, шляхом зміни або величин, або числових даних, або шуканих задачі, або через зміну однакової (сталой) величини. Визначено істотні ознаки математичних структур та способи розв'язування як окремих типів задачі, так і, загалом, даної групи задач.

Для вчителів початкових класів та студентів факультетів початкового навчання педагогічних ВНЗ.

УДК 373.3.016:811.161.2
ББК 74.268.1Укр

ISBN 978-966-451-000-1 (6-ка «Шк. світу»)

ISBN 978-966-2753-19-6

© Скворцова С.О., 2013

© ТОВ «Редакції газет з дошкільної та початкової освіти», дополіграфічна підготовка, 2013

ЗМІСТ

Вступ	5
Методика навчання розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного. 3—4 класи	11
1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на знаходження четвертого пропорційного.....	11
2. Ознайомлення із задачами на знаходження четвертого пропорційного. Спосіб знаходження однакової (сталой) величини.....	13
2.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однакова величина є величиною однієї одиниці.....	17
2.2. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є загальна величина.....	27
2.3. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є кількість або час.....	35
3. Розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.....	44
3.1. Ознайомлення зі способом відношень.....	46
3.2. Зміна числових даних задачі з метою застосування способу відношень при її розв’язанні.....	47
3.3. Зміна шуканого. Складання і розв’язання обернених задач.....	49
3.4. З’ясування умов застосування способу знаходження однакової величини та способу відношень.....	52
4. Формування вміння розв’язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного.....	53
Методика навчання розв’язування задач на пропорційне ділення. 4 клас	54
1. Підготовча робота до введення задач на пропорційне ділення.....	54
2. Ознайомлення із задачами на пропорційне ділення.....	61
2.1. Задачі, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення загальної величини.....	61

2.2. Задачі, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення кількості або часу.....	70
2.3. Задачі, в яких однаковою величиною є величина кількості або часу, а шуканими два значення загальної величини.....	76
2.4. Задачі, в яких однаковою величиною є величина кількості або часу, а шуканими — два значення величини однієї одиниці виміру або лічби.....	79
3. Формування уміння розв’язувати задачі на пропорційне ділення.....	86

Методика навчання розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями. 4 клас.....

1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями.....	88
2. Ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями.....	93
2.1. Задачі, в яких однаковою є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення загальної величини.....	94
2.2. Задачі, в яких однаковою є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення кількості або часу.....	103
2.3. Задачі, в яких однаковою є величина кількості або часу, а шуканими — два значення величини однієї одиниці.....	109
2.4. Задачі, в яких однаковою є величина кількості або часу, а шуканими — два значення загальної величини.....	113
3. Формування уміння розв’язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями.....	120

Алгебраїчний метод розв’язування задач.....

1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного.....	123
2. Задачі на пропорційне ділення.....	124
3. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями.....	125

ВСТУП

Серед розмаїття типових задач можна виокремити такі, що містять однакову (сталу) величину. Це задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями. Їх математичні структури можна представити таким чином:

Задачі на знаходження четвертого пропорційного				Задачі на пропорційне ділення				Задачі на знаходження невідомих за двома різницями			
I	a	однакова	b	I	}?	однакова	b	I	a	однакова	b
II	?		k	II	}?		k	II	?, на c б. (м.)		k

Рис. 1. Задачі, що містять однакову (сталу) величину

Наведемо приклади таких задач.

Задача 1. За 8 годин перший робітник виготовляє 88 деталей. Скільки деталей виготовить за 10 годин другий робітник, якщо працюватиме з тією самою продуктивністю?

Задача 2. Два робітники виготовили 198 деталей. Перший працював 8 годин, а другий — 10 годин. Скільки деталей окремо виготовив кожний робітник, якщо вони працювали з однаковою продуктивністю?

Задача 3. Перший робітник працював 8 годин, а другий 10 годин, причому другий робітник виготовив на 22 деталі більше, ніж перший. Скільки деталей виготовив кожен робітник, якщо вони працювали з однаковою продуктивністю?

Усі ці задачі мають *спільні ознаки*:

- ситуація задач описується трьома взаємопов'язаними величинами;
- ідеться про два випадки, причому значення однієї з величин є однаковим для обох випадків;
- значення іншої величини є відомим для обох випадків.

Відмінна ознака — шуканим є або одне числове значення, або два числові значення третьої величини.

У задачах на знаходження четвертого пропорційного для цієї величини дано одне числове значення, а інше є шуканим; в задачах на пропорційне ділення обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму; в задачах на знаходження невідомих за двома різницями, так само, обидва числові значення є шуканими, але дано їх різницеве відношення.

Оскільки ці задачі мають багато спільного у математичній структурі, а саме — містять однакову (сталу) величину, то знаходження її значення й визначає спосіб розв'язування задач цієї групи.

Однак існують відмінності у знаходженні цього значення: у задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за числовими значеннями двох інших величин одного з випадків; у задачах на пропорційне ділення — за двома сумарними значеннями двох інших величин; у задачах на знаходження невідомих за двома різницями — за різницевиими відношеннями двох інших величин.

Але слід зазначити, що існує й інший спосіб розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного — спосіб відношень, основною ідеєю якого є визначення кратного відношення двох значень однієї з величин: шуканого з числовим даним.

Алгебраїчний метод розв'язування задач цієї групи полягає у складанні рівняння, причому змінною, як правило, позначається значення однакової (сталой) величини.

У курсі математики розглядаються так звані ускладнені задачі на знаходження четвертого пропорційного. Інша їх назва — задачі на подвійне зведення до одиниці. Спільним у цих задачах є наявність однакової величини, але в задачах на знаходження четвертого пропорційного це величина однієї одиниці вимірювання або лічби, а в задачах на подвійне зведення до одиниці — «подвійна одиниця».

Наприклад:

За 8 годин два робітники виготовляють 176 деталей. Скільки деталей виготовить за 10 годин один робітник, якщо працюватиме з тією самою продуктивністю?

У курсі початкової математики пропонуються задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є будь-яка з трьох

взаємопов'язаних величин (або величина однієї одиниці вимірювання чи лічби, або кількість (час), або загальна величина), задачі на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою здебільшого є величина однієї одиниці, але можуть пропонуватися й задачі, в яких однаковою є кількість.

Задачі на пропорційне ділення або на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є загальна величина, не розглядаються в курсі початкової школи, оскільки вони розв'язуються лише алгебраїчним методом і передбачають складання і розв'язання учнями дрібно-раціонального рівняння, що можливо лише в 6-му класі.

Усі ці види задач пропонуються учням у 5—6-х класах основної школи, де основним методом їх розв'язування стає алгебраїчний. Крім того, задачі на пропорційне ділення ускладнюються через збільшення випадків, що описуються в задачі; а в задачах на знаходження невідомих за двома різницями однаковою стає загальна величина; задачі ж на знаходження четвертого пропорційного, починаючи з 6-го класу, розв'язуються складанням пропорції.

Таким чином, від якості сформованих у початковій школі вмій розв'язувати задачі, що містять однаково-сталу величину, залежить успіх подальшого навчання дітей в основній школі.

Теоретичною основою методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі, що містять однаково (сталу) величину, є теорія змістовних узагальнень В. Давидова, що можливо через всебічне дослідження задачі. Дослідження здійснюємо шляхом зміни величин задачі, числових даних або шуканого (шуканих) і визначення впливу цих змін на її розв'язання.

Уміння розв'язувати задачі окремих типів, до яких і відносяться задачі, що містять однаково (сталу) величину, формуються на основі знань різноманітних математичних структур типових задач та знань узагальнених планів розв'язання задач певних математичних структур. Зрозуміло, що учневі важко запам'ятати все розмаїття математичних структур таких задач і відповідні плани розв'язання.

З метою зменшення обсягу навчального матеріалу, який підлягає запам'ятовуванню, нами здійснено спробу узагальнення математичних структур і способів розв'язання задач трьох типів:

- 1) задачі на знаходження четвертого пропорційного;
- 2) задачі на пропорційне ділення;
- 3) задачі на знаходження невідомих за двома різницями.

З метою здійснення узагальнення на досить високому рівні навчання має бути побудоване особливим чином. У запропонованій методиці реалізовано науково обґрунтовані психологами, дидактами та методистами положення щодо навчання розв'язування задач, а саме:

1) предметом і основним змістом навчання є види задач, способи і зразки розв'язування задач конкретних видів (С. Царьова);

2) навчання розв'язування задач відбувається успішно в тому випадку, коли метою дії виступає спосіб розв'язання, його засвоєння, а власне розв'язання окремої задачі є лише побічним продуктом (Ю. Машбиць);

3) задачі, їх генезис, особливості, структура повинні стати предметом глибокого вивчення учнями (Л. Фрідман);

4) під час навчання розв'язування задач певного виду на перших етапах слід розгорнути процес розв'язання як процес моделювання задач (Л. Фрідман);

5) основним методом навчання розв'язування задач має стати метод розв'язання особливої системи підготовчих навчальних задач (Л. Фрідман).

Відповідно до нової базової програми, затвердженої наказом МОНмолодьспорту України від 12.09.2011 № 1050, вивчення задач цієї групи відбувається у такому порядку:

- 1) задачі на знаходження четвертого пропорційного (3-й клас, 4-й клас);
- 2) задачі на пропорційне ділення (4-й клас);
- 3) задачі на знаходження невідомих за двома різницями (4-й клас).

Автором розроблено *програму вивчення задач, що містять однакову (сталу) величину*:

1. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) є величина однієї одиниці вимірювання або лічби, способом знаходження однакової (сталої) величини. Перший та другий види задач на знаходження четвертого пропорційного (3-й клас).

2. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) є значення загальної величини, способом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

3. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) є значення кількості або часу, способом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

4. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень (4-й клас).

5. Введення задачі на пропорційне ділення, в якій однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків, шляхом перетворення відповідної задачі на знаходження четвертого пропорційного (4-й клас).

6. Формування вміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків (4-й клас).

7. Формування вміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою (сталою) величиною є значення кількості або часу (4-й клас).

8. Введення задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків, шляхом перетворення відповідної задачі на пропорційне ділення (4-й клас).

9. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків (4-й клас).

10. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення кількості (4-й клас).

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв'язування цих типів задач є всебічний аналіз і дослідження задачі за такими рівнями:

- за зміною групи взаємопов'язаних величин, що перебувають у пропорційній залежності, і визначенням впливу цієї зміни на розв'язання задачі;

- за зміною числових даних і визначенням її впливу на план розв'язання задачі;
- за зміною шуканої величини за певної однакової величини і визначенням її впливу на план розв'язання задачі;
- за зміною однакової величини і визначенням впливу цієї зміни на план розв'язання задачі;
- за зміною числових даних задачі з метою застосування іншого способу розв'язання (для задач на знаходження четвертого пропорційного).

Для реалізації загальної програми вивчення задач, що містять однакоvu (сталу) величину, розроблено методику навчання молодших школярів розв'язування кожного із зазначених типів задач. Розглянемо її докладніше.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦІЙНОГО

3—4 КЛАСИ

1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на знаходження четвертого пропорційного.

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати знання учнів про групи взаємопов'язаних величин та залежності між ними (рис. 2); уміння визначати в тексті задачі величини, навіть тоді, коли вони задані неявно, виходячи з найменувань числових даних. Актуалізація зазначених знань і умінь здійснюється під час розв'язування простих задач з пропорційними величинами.



Рис. 2. Залежності між взаємопов'язаними величинами певних груп

Крім згаданих груп взаємопов'язаних величин, задачі містять ще й інші групи величин. Саме вони викликають в учнів найбільші труднощі. У таких задачах загальною величиною буде величина вихідного продукту, величиною однієї одиниці — величина вихідного продукту на одиницю нового продукту, і третьою є величина нового продукту.

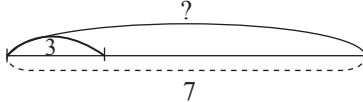
Наприклад:

Задача. На виготовлення 1 кг цукру витрачається 3 кг цукрових буряків. Скільки треба взяти цукрових буряків, щоб виготовити 7 кг цукру?

— Запишемо цю задачу коротко у вигляді таблиці:

Загальна маса буряків (кг)	Маса буряків на 1 кг цукру (кг)	Маса цукру (кг)
?	3 кг	7 кг

За коротким записом поясніть числа задачі. Яке запитання задачі? Позначимо це на схемі:



— У відповіді отримаємо число більше чи менше, ніж 3 кг? Чому?

— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I — масу буряків на 1 кг цукру (3 кг) та II — масу цукру (7 кг).)

— Якою дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Можна, тому що відомі обидва числові значення.)

— Запишіть розв'язання задачі. ($3 \cdot 7 = 21$ (кг).)

— Запишіть відповідь. (Для виготовлення 7 кг цукру потрібно 21 кг цукрових буряків.)

— Повернімося до нашого припущення. Чи воно підтвердилося?

— Впишемо числа задачі: 21, 3, 7. Поясніть числа задачі.

— Складіть задачу із числами 21, ?, 7. Які величини вона містить? Значення якої величини є шуканим? (Маса буряків на 1 кг цукру.)

— Зі значенням якої величини можна порівняти значення цієї величини? (Із загальною масою буряків.) У відповіді задачі ми отримаємо число більше чи менше за 21? Чому?

— Розв'яжіть задачу усно.

— Складіть обернену задачу, в якій потрібно знайти масу цукру. (21, 3, ?.) Які величини вона містить? Значення якої величини є шуканим? Із чого отримують цукор? Порівняйте масу цукру і масу буряків. Що більше? Що менше?

— Більше чи менше за 21 число ми отримуємо у відповіді?

— Розв'яжіть задачу усно.

2. Ознайомлення із задачами на знаходження четвертого пропорційного. Спосіб знаходження однакової (сталой) величини.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного вводяться на основі розв'язання двох послідовних простих задач із взаємопов'язаними величинами і поєднання їх в одну складену задачу. Учні порівнюють складену задачу з двома попередніми — простими — і визначають, що вона включає розглянуті дві прості задачі. Якщо відразу після цього учні можуть сформулювати план розв'язання задачі, то записуємо розв'язання. Якщо ні — виконується повний розбір задачі. Наприклад:

Задача. Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса однієї гуски?

— Про що розповідається в задачі? Що означає вислів «однакових гусей»? Що в них має бути однаковим — колір, маса тощо? (*В них однакова маса.*)

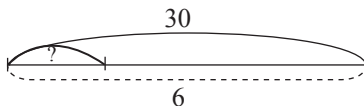
— Які величини містить ця задача?

— Запишемо на дошці цю задачу коротко у вигляді таблиці:

Загальна маса (кг)	Маса 1 гуски (кг)	Кількість гусей (шт.)
30 кг	?, однакова	6 шт.

— За коротким записом поясніть, що означають числа задачі.

— Про що запитується в задачі? Проілюструємо це схемою:

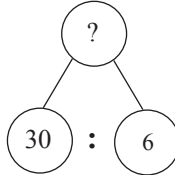


— Як пов'язані між собою величини? Як знайти загальну масу? Чому? Як знайти масу одного гуся? Чому? Як знайти кількість гусей?

— Назвіть запитання задачі. Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (*Треба знати два числові значення: I — загальну масу гусей, відомо 30 кг, та II — кількість гусей, відомо 6.*)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так.)



— Запишіть на дошці розв'язання задачі. ($30 : 6 = 5$ (кг).)

— Запишіть на дошці відповідь. (Відповідь: маса однієї гуски 5 кг.)

Задача. Маса однієї гуски — 5 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

— Про що розповідається в задачі?

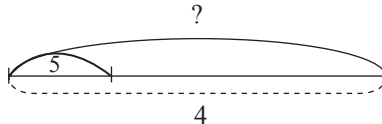
— Які величини містить ця задача? (Маса одного гуся, кількість гусей, загальна маса.)

— Запишемо на дошці цю задачу коротко у вигляді таблиці:

Загальна маса гусей (кг)	Маса 1 гуся (кг)	Кількість гусей (шт.)
?	5 кг	4 шт.

— За коротким записом поясніть, що означають числа задачі.

— Про що запитується в задачі? Проілюструємо це схемою:

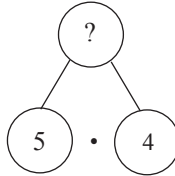


— Як пов'язані між собою величини?

— Назвіть запитання задачі. Що треба знати, аби відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I — масу 1 гуся (відома — 5 кг), та II — кількість гусей (відома — 4).)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Так.)



— Запишіть розв'язання задачі. ($5 \cdot 4 = 20$ (кг).)

— Запишіть відповідь. (Відповідь: маса чотирьох гусей 20 кг.)

Задача. Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

— Про що розповідається в цій задачі?

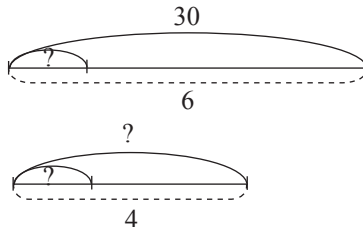
— Які величини містить ця задача? Розгляньте короткий запис цієї задачі (учитель поєднує короткі записи попередніх задач).

	Загальна маса гусей (кг)	Маса 1 гуски (кг)	Кількість гусей (шт.)
I	30 кг	?, однакова	6 шт.
II	?		4 шт.

— За таблицею поясніть числа задачі. Що означає однакова величина?

— Яке запитання задачі?

— У відповіді ми отримаємо більше чи менше за 30 число? Чому?



— Порівняйте цю задачу з попередніми. Що ви помітили цікавого?

— Так, ця задача складається з двох попередніх задач — вона складена.

— Повторіть запитання задачі. *(Яка маса чотирьох гусей?)*

— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? *(Треба знати два числові значення: I — масу однієї гуски (невідомо), та II — кількість гусей (відома — 4).)*

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? *(Дією множення: щоб знайти загальну масу, треба масу однієї гуски помножити на кількість гусок.)*

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? *(Не можна, ми не знаємо маси однієї гуски.)*

— Що сказано в задачі про масу однієї гуски в першому та другому випадках? *(Маса однієї гуски і в першому, і в другому випадках однакова.)*

— Що це означає? *(Можна дізнатися масу однієї гуски за числовими даними першого випадку.)*

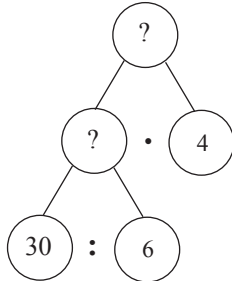
— Що треба знати, щоб знайти масу однієї гуски — однакову величину? *(Треба знати два числові значення стосовно першого випадку: I — загальну масу гусей (відома — 30 кг), II — кількість гусей (відома — 6 шт.).)*

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? *(Дією ділення: щоб знайти масу однієї гуски, треба загальну масу поділити на кількість.)*

— Чи можна на це запитання відповісти відразу?

— Розбийте цю задачу на прості, сформулюйте кожен просту задачу.

— Складіть план розв'язування задачі.



— Чи треба записувати розв'язання цієї задачі, чи воно вже є на дошці? Треба проставити лише порядок виконання арифметичних дій і написати пояснення до них:

1) $30 : 6 = 5$ (кг) — маса 1 гуски; *однакова величина.*

2) $5 \cdot 4 = 20$ (кг) — загальна маса 4 гусей.

— Запишіть відповідь. (*Відповідь: маса 4 гусей 20 кг.*)

— Повернімося до припущення. Чи правильно ми припустили, що у відповіді буде число, менше за 30? (*Так. Маса чотирьох гусей менша за масу 6 гусей!*)

2.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однакова величина є величиною однієї одиниці.

2.1.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення загальної величини.

Учням пропонується задача на знаходження четвертого пропорційного в готовому вигляді. Робота над задачею здійснюється за загальним планом. Але після пояснення чисел задачі діти роблять припущення щодо очікуваного результату: у відповіді отримаємо число більше чи менше за дане?

У ході роботи над задачею здійснюється аналітичний пошук розв'язання задачі з розбиттям задачі на прості задачі й формулюванням плану розв'язання. Розв'язавши задачу і отримавши відповідь на її запитання, повертаємося до зробленого припущення і підтверджуємо або скасовуємо його правильність.

Наприклад:

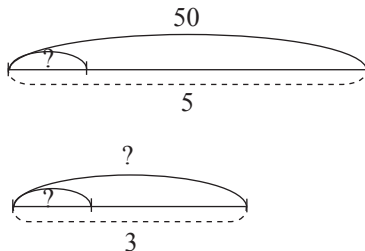
Задача 1. Купили банани й апельсини за однаковою ціною. За 5 кг бананів заплатили 50 грн. Скільки коштують 3 кг апельсинів?

— Про що розповідається в цій задачі?

— Які величини містить ця задача? Розгляньте короткий запис цієї задачі.

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	50 грн	?, однакова	5 кг
А.	?		3 кг

— За таблицею поясніть числа задачі. Що означає однакова величина? Яке запитання задачі? У відповіді ми отримаємо число більше чи менше за 50? Чому? Проілюструємо це схемою:



— Повторіть запитання задачі. Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I — ціну (невідомо), та II — кількість — масу апельсинів (відома — 3).) Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення: щоб знайти загальну вартість, треба ціну помножити на кількість.)

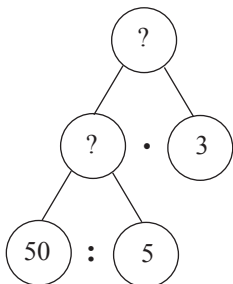
— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, ми не знаємо ціни.)

— Що сказано в задачі про ціну бананів і апельсинів? (Ціна бананів і апельсинів однакова.) Що це означає? (Можна знайти ціну бананів і зробити висновок, що такою самою є ціна апельсинів.)

— Що треба знати, щоб знайти ціну — однакову величину? (Треба знати два числові значення стосовно першого випадку — бананів: I — загальну вартість бананів (відома — 50 грн), та II — кількість (відома — 5 кг).) Якою арифметичною дією відповімо на запитання? (Дією ділення: щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість.)

— Чи можна на це запитання відповісти відразу?

— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією узнаємо ціну, вона є однаковою для бананів і апельсинів. Другою дією відповімо на запитання задачі, узнаємо вартість апельсинів.)



— Запишіть розв’язання.

1) $50 : 5 = 10$ (грн) — ціна бананів або апельсинів, *однакова величина*.

2) $10 \cdot 3 = 30$ (грн) — загальна вартість апельсинів.

Або $50 : 5 \cdot 3 = 30$ (грн).

— Запишіть відповідь. (*Відповідь: 3 кг апельсинів коштують 30 грн.*)

— Повернімося до нашого припущення. Чи правильно ми припустили, що у відповіді буде число менше за 50?

2.1.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі.

Далі здійснюється робота над задачею після її розв’язання, а саме її дослідження.

Учням пропонується в задачі 1 змінити величини, наприклад це буде загальна маса, маса одного предмета, кількість предметів. Учні складають задачу, яка має таку саму математичну структуру, що й попередня. Далі з’ясовується, як ця зміна вплине на розв’язання: розв’язання задачі не змінюється, треба лише «виправити» пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

	Загальна маса (кг)	Маса 1 ящика (кг)	Кількість ящиків (шт.)
Б.	50 кг	?, однакова	5 шт.
А.	?		3 шт.

1) $50 : 5 = 10$ (кг) — маса 1 ящика бананів або апельсинів;
однакова величина.

2) $10 \cdot 3 = 30$ (кг) — загальна маса апельсинів.

Або $50 : 5 \cdot 3 = 30$ (кг).

2.1.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

Пропонується змінити числові значення в задачі.

Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них підходящі. Наприклад:

	Загальна маса (кг)	Маса 1 ящика (кг)	Кількість ящиків (шт.)
Б.	42 кг	?, однакова	7 шт.
А.	?		5 шт.

Далі досліджується вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

1) $42 : 7 = 6$ (кг) — маса 1 ящика бананів або апельсинів; *однакова величина.*

2) $6 \cdot 5 = 30$ (кг) — загальна маса апельсинів.

Або $50 : 5 \cdot 3 = 30$ (кг).

На основі порівняння текстів задач та їх розв'язань учні встановлюють: у кожній задачі є три величини, причому величина однієї одиниці виміру або лічби однакова. Невідомим є загальне значення величини. А також у кожній задачі є два випадки. Ці задачі належать до одного виду. Такі задачі є **задачами на знаходження четвертого пропорційного.**

Першою дією, дією ділення, в таких задачах ми узнаємо однакову величину однієї одиниці виміру або лічби (тому що без неї ми не зможемо відповісти на запитання задачі) за двома числовими значеннями інших величин стосовно першого випадку. Другою дією, дією множення, в таких задачах ми відповідаємо на запитання задачі, узнаємо загальне значення величини.

2.1.4. Зміна шуканого в задачі. Складання і розв’язування обернених задач.

Щоб перевірити правильність розв’язання задачі 1 (с. 17), складаємо і розв’язуємо обернену задачу на знаходження кількості або часу.

5, 50, 3, **30** — пряма задача (задача 1, с. 17).

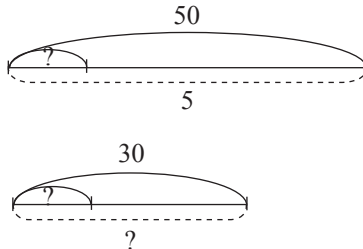
5, 50, **3**, **30** — перша обернена задача до задачі 1 (с. 17).

Задача. 5 кг бананів коштують 50 грн. Скільки кілограмів апельсинів можна купити на 30 грн, якщо ціна бананів і апельсинів однакова?

— Виконайте зміни в короткому записі на дошці:

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
I	50 грн	?, однакова	5 кг
II	30 грн		?

— Назвіть запитання цієї задачі. Більше чи менше, ніж 5 кг, число отримаємо у відповіді? Чому? Проілюструємо це схемою:



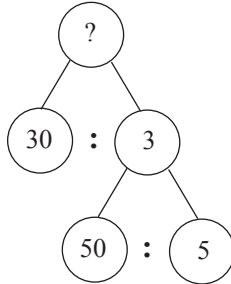
— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I — вартість апельсинів (30 грн), та II — ціну апельсинів (невідомо).) Якою дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення.)

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, тому що ми не знаємо ціни. Це однакова величина, тому її можна знайти за двома даними величинами першого випадку — для бананів.)

— Що треба знати, щоб знайти ціну? (Треба знати два числові значення: I — вартість бананів (відома — 50 грн), та II — їх кількість (відома — 5 кг).)

— Якою дією відповімо на запитання? (Дією ділення.)

— Тепер можна відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання прийшли до числових даних задачі.)



— Розкажіть план розв’язування цієї задачі. (Першою дією узнаємо однакову величину — ціну бананів, а отже, й ціну апельсинів. Другою дією відповімо на запитання задачі, дізнаємося, скільки кілограмів апельсинів можна купити на 30 грн.)

— Запишіть розв’язання.

1) $50 : 5 = 10$ (грн) — ціна бананів або ціна апельсинів; однакова величина.

2) $30 : 10 = 3$ кг — стільки апельсинів можна купити на 30 грн.

Розв’язання можна також записати виразом: $30 : (50 : 5) = 3$ (кг).

— Порівняйте план розв’язування прямої і оберненої задач. Що цікавого ви помітили? (Обидві задачі містять одну й ту саму першу дію, в якій дізнаються про однакову величину — ціну.)

— А чим відрізняється розв’язання прямої й оберненої задач? (Другою дією — в оберненій задачі це дія ділення. Але в обох задачах другою дією відповідаємо на запитання задачі.)

— Запишіть відповідь до задачі. (Відповідь: на 30 грн можна купити 3 кг апельсинів.)

— Який висновок можна зробити щодо перевірки правильності розв’язання прямої задачі? (Ми її розв’язали правильно, тому що у відповіді в оберненій задачі ми отримали число 3, яке було дано в прямій задачі.)

— Порівняйте умови цих задач. Чим вони схожі? *(Обидві задачі містять три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова. В обох задачах є два випадки, причому стосовно першого випадку дані значення двох величин, а стосовно другого — лише однієї, а значення другої величини є шуканим.)*

— Таким чином, обидві задачі містять чотири числа, одне з яких є шуканим. Такі задачі є задачами на знаходження четвертого пропорційного.

— Чим відрізняються ці задачі? *(В першій задачі шуканим було значення величини, яка є загальною — вона знаходиться дією множення; а в другій задачі шуканим є значення величини, яка знаходиться дією ділення.)*

— Цю відмінність і покладено в основу класифікації таких задач: **задачі, в яких треба знайти значення загальної величини дією множення, вважаються задачами I виду; а задачі, в яких шукана величина знаходиться дією ділення, — задачами II виду.**

— А що спільного в планах розв'язування задач I і II виду? *(Першою дією, дією ділення, знаходимо значення однакової величини. Другою — дією множення або дією ділення — відповідаємо на запитання задачі.)*

Аналогічно складаємо і розв'язуємо другу обернену задачу.

5, 50, 3, 30 — друга обернена задача до задачі I (с. 17).

Задача. Скільки коштують 5 кг бананів, якщо за 3 кг апельсинів сплатили 30 грн? Банани і апельсини продаються за однаковою ціною.

— Виконавши зміни у короткому записі, учні встановлюють тип задачі на основі аналізу її математичної структури. Після цього застосовують узагальнений план розв'язування.

Розв'язання.

1) $30 : 3 = 10$ (грн) — ціна апельсинів або бананів; *однакова величина.*

2) $10 \cdot 5 = 50$ (грн) — вартість бананів.

Або $30 : 3 \cdot 5 = 50$ (грн).

Відповідь: 5 кг бананів коштують 50 грн.

— Порівняйте другу обернену задачу з прямою. Що в них спільного? *(В обох задачах шуканим є загальна величина — вартість.)*

— Чим вони відрізняються? (У прямій задачі шуканою є вартість апельсинів, а в оберненій — вартість бананів. Крім того, у прямій задачі однакову величину знаходять за двома даними величинами, які відносяться до бананів; а в оберненій — за двома даними величинами, які відносяться до апельсинів.)

Результати узагальнення представлено у таблиці (рис. 4). У наступних таблицях будут використані скорочення: загальна величина буде позначатися словом «Загальна»; величина однієї одиниці виміру або лічби буде позначатися словом «Одиниця»:

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, однакова	□	I	?	?, однакова	□
II	?		□	II	□		□

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення загальної величини, дією множення

Рис. 4. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є загальна величина (однакова величина — величина однієї одиниці вимірювання або лічби)

Далі складається третя обернена задача.

5, 50, 3, 30 — третя обернена задача до задачі 1 (с. 17).

Задача. Скільки кілограмів бананів можна купити на 50 грн, якщо на 30 грн можна купити 3 кг апельсинів? (Ціна бананів і апельсинів однакова.)

Розв'язання.

1) $30 : 3 = 10$ (грн) — ціна апельсинів або ціна бананів; *однакова величина.*

2) $50 : 10 = 5$ (кг) — стільки можна купити бананів.

Або $50 : (30 : 3) = 5$ (кг).

Відповідь: на 50 грн можна купити 5 кг бананів.

— Порівняйте першу і третю обернені задачі. Чим вони схожі? (В обох задачах шуканою є кількість.)

— Чим вони відрізняються? (У першій задачі шуканою є кількість апельсинів, а в третій — кількість бананів. Їх розв'язання відрізняються тим, що в першій задачі однакову величину знаходили за даними двома величинами, які відносяться до бананів, а в третій — за двома даними величинами, які відносяться до апельсинів.)

Результати узагальнення подано у таблиці (рис. 5):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, однакова	□	I	□	?, однакова	?
II	□		?	II	□		□

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення кількості або часу, дією ділення

Рис. 5. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є кількість або час (однакова величина — величина однієї одиниці вимірювання або лічби)

— Порівняйте другу і третю обернені задачі. Що в них спільного? (В них однакові перші дії. Однакова величина в обох задачах знаходиться за двома даними, які відносяться до апельсинів.)

— Чим вони відрізняються? (Другими діями. У другій оберненій задачі остання дія — множення, тому що знаходять загальну величину, а в третій — ділення, тому що знаходять кількість.)

Узагальнюємо математичні структури цих задач та спосіб їх розв'язання (рис. 6):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, однакова	□	I	□	?, однакова	□
II	?		□	II	□		?

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення загальної величини (або кількості), дією множення (або ділення)

Рис. 6. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є загальна величина або кількість чи час (однакова величина — величина однієї одиниці вимірювання або лічби)

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці:

- 1) ці задачі описують два випадки;
- 2) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 3) величина однієї одиниці вимірювання або лічби є однаковою для двох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини;
- 5) дано лише одне числове значення іншої величини, а друге є шуканим.

2.2. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є загальна величина.

2.2.1. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

У задачі 1 (с. 17) змінюємо однакову величину однієї одиниці вимірювання або лічби — однаковою стає значення загальної величини для обох випадків.

— Повернімося до задачі 1 (*Купили банани і апельсини за однаковою ціною. За 3 кг апельсинів заплатили 30 грн. Скільки коштують 5 кг бананів?*). Які величини вона містить? Яка величина є однаковою?

— Припустімо, що вартість 5 кг бананів і 3 кг апельсинів однакова. Що можна сказати в цьому випадку про ціну? (*Зрозуміло, що ціна бананів і апельсинів має бути різною.*)

— Що можна сказати про ціну бананів відносно ціни апельсинів? (*Бананів купили більше, ніж апельсинів, за однакової вартості, тому, навпаки, ціна бананів буде меншою за ціну апельсинів!*)

Задача 2. Вартість 3 кг апельсинів і 5 кг бананів однакова. Ціна кілограма апельсинів 10 грн. Яка ціна кілограма бананів?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
А.	?, однакова	10 грн	3 кг
Б.		?	5 кг

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: ціна бананів буде меншою за 10 грн, тому що бананів купили більше, ніж апельсинів, і при цьому заплатили грошей стільки ж, скільки й за апельсини. Ціна і кількість за сталої вартості змінюються в обернених напрямках!

Проаналізувавши математичну структуру отриманої задачі, учні доходять висновку, що вона має всі істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, тому це задача на знаходження четвертого пропорційного. Але, на відміну від попередніх, у цій задачі однаковою

є загальна величина (вартість). Школярі згадують узагальнений спосіб розв'язання таких задач:

- 1) першою дією узнаємо значення однакової величини;
- 2) другою дією відповімо на запитання задачі.

— Як вплине зміна однакової величини на розв'язання задачі?
(У попередніх задачах однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення. У цій задачі однакова величина — загальна величина, а її знаходять дією множення. Тому в цій задачі першою дією узнаємо значення однакової величини (вартості) дією множення, а другою дією відповімо на запитання задачі (узнаємо ціну апельсинів) дією ділення.)

Розв'язання.

1) $10 \cdot 3 = 30$ (грн) — вартість апельсинів або вартість бананів; однакова величина.

2) $30 : 5 = 6$ (грн) — ціна бананів.

Або $(10 \cdot 3) : 5 = 6$ (грн).

Відповідь: ціна бананів — 6 грн.

2.2.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

Учням пропонується в задачі 2 (с. 27) змінити величини. Учні складають задачу. Далі з'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання. Розв'язання задачі не змінюється, треба лише «виправити» пояснення до арифметичних дій. Запис виразу не змінюється.

2.2.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

Пропонується змінити в задачі числові значення. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них підходящі. Наприклад:

	Загальна маса (кг)	Маса 1 ящика (кг)	Кількість ящиків (шт.)
А.	?, однакова	3 кг	7 шт.
Б.		?	5 шт.

Далі досліджується вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

2.2.4. Зміна шуканого. Складання і розв'язування обернених задач.

10, 3, $\boxed{6}$, 5 — пряма задача (задачі 2, с. 27).

10, 3, 6 , $\boxed{5}$ — перша обернена задача до задачі 2 (с. 27).

Учні виконують зміни у короткому записі й формулюють обернену задачу.

Задача. Скільки кілограмів бананів за ціною 6 грн можна купити на ту саму суму, яку треба заплатити за 3 кг апельсинів, якщо ціна апельсинів — 10 грн?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
А.	?, однакова	10 грн	3 кг
Б.		6 грн	?

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: кількість бананів більша за 3 кг, тому що їх ціна менша за однієї й тієї самої вартості. Ціна і кількість за сталої вартості змінюються в обернених напрямках.

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі й записують розв'язання.

Розв'язання.

1) $10 \cdot 3 = 30$ (грн) — вартість апельсинів або вартість бананів; *однакова величина.*

2) $30 : 6 = 5$ кг — стільки бананів можна купити.

Або $(10 \cdot 3) : 6 = 5$ (кг).

Відповідь: на ту саму суму, що й 3 кг апельсинів, можна купити 5 кг бананів.

— Чи отримали ми число, яке було дано в прямій задачі? Який висновок можна зробити? (*Ми розв'язали пряму задачу правильно.*)

— Порівняйте розв'язання прямої й оберненої задач. Чим вони схожі? (*В них однакова перша дія, тому що однакову величину ми знаходили за даними відносно купівлі апельсинів.*)

— Чим вони відрізняються? (*Другими діями. В обох задачах останні дії ділення, але в прямій задачі ми шукали ціну (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість), а в оберненій — кількість (щоб знайти кількість, треба вартість поділити на ціну).*)

Складіть і розв'яжіть другу обернену задачу:

10, 3, 6, 5 — друга обернена задача до задачі 2 (с. 27).

Учні вносять зміни у короткий запис задачі й формулюють другу обернену задачу.

Задача. Скільки кілограмів апельсинів за ціною 10 грн можна купити на ту саму суму, яку треба заплатити за 5 кг бананів, якщо ціна бананів — 6 грн за кілограм?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
А.	?, однакова	10 грн	?
Б.		6 грн	5 грн

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: кількість апельсинів буде меншою, ніж кількість бананів, тому що ціна апельсинів більша за тієї самої вартості. Кількість і ціна змінюються в обернених напрямках за сталої вартості!

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі й записують розв'язання.

Розв'язання.

1) $6 \cdot 5 = 30$ (грн) — вартість бананів або апельсинів; *однакова величина.*

2) $30 : 10 = 3$ кг — стільки апельсинів можна купити.

Або $(6 \cdot 5) : 10 = 3$ (кг).

Відповідь: на ту саму суму, що й 5 кг бананів, можна купити 3 кг апельсинів.

— Порівняйте другу і першу обернені задачі. Що в них спільного? (*В обох задачах шуканою була кількість.*)

— Чим вони відрізняються? (*В першій оберненій задачі однакову величину узнають за даними, які відносяться до апельсинів, а в другій оберненій задачі — за даними, які відносяться до бананів.*)

Результати узагальнення подано у таблиці (рис. 7):

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	?
II		<input type="checkbox"/>	?	II		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини – значення загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
- 2) знаходимо шукане значення величини кількості або часу, відповідаємо на запитання задачі, дією ділення

Рис. 7. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є кількість або час (однакова величина — загальна величина)

Далі учні складають третю обернену задачу:

10, 3, 6, 5 — третя обернена задача до задачі 2 (с. 27).

Задача. Вартість 3 кг апельсинів і 5 кг бананів однакова. Ціна кілограму бананів — 6 грн. Яка ціна кілограму апельсинів?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
А.	?, однакова	?	3 кг
Б.		6 грн	5 кг

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: ціна апельсинів буде більшою, тому що за тієї самої вартості їх купили меншу кількість. Ціна і кількість змінюються в обернених напрямках за сталої вартості.

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі й записують розв'язання.

Розв'язання.

1) $6 \cdot 5 = 30$ (грн) — вартість бананів або апельсинів; *однакова величина.*

2) $30 : 3 = 10$ (грн) — ціна апельсинів.

Або $(6 \cdot 5) : 3 = 10$ (грн).

Відповідь: ціна апельсинів — 10 грн.

— Порівняйте цю задачу з прямою задачею. Чим вони схожі?
(В обох задачах шуканою є ціна.)

— Чим вони відрізняються? (У прямій задачі шуканою є ціна бананів, а в цій задачі — ціна апельсинів. Розв'язання відрізняються: хоча і там, і там перша дія — множення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними, які відносяться до апельсинів, а в цій — за двома числовими даними, що відносяться до бананів. В обох задачах останні дії ділення (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість).) Результати узагальнення подано у таблиці (рис. 8):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	?, однакова	?	<input type="checkbox"/>
II		?	<input type="checkbox"/>	II		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

The diagram shows a cylinder with a dashed back edge. The top horizontal edge is labeled with a question mark '?' above it. A small square is placed at the top left corner. The bottom horizontal edge is also labeled with a question mark '?' below it. A small square is placed at the bottom center. A vertical dashed line in the middle is labeled with a question mark '?' to its right. A small square is placed at the bottom right corner. The diagram is used to illustrate the relationship between total length, unit length, and quantity.

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — значення загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
- 2) знаходимо шукане значення величини кількості або часу, відповідаємо на запитання задачі, дією ділення

Рис. 8. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є величина однієї одиниці вимірювання або лічби (однакова величина — загальна величина)

— Порівняйте другу і третю обернені задачі. Що в них спільного?
(В них однакові перші дії, тому що однакова величина знаходиться за двома числовими даними, які відносяться до бананів.)

— Чим вони відрізняються? (Останніми діями. Хоча в обох задачах останні дії — ділення, але в другій оберненій задачі ми знаходимо кіль-

кість (щоб знайти кількість, треба вартість розділити на ціну), а в третій — ціну (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість).

Узагальнюємо істотні ознаки математичних структур задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є загальна величина (рис. 9):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
II		?	<input type="checkbox"/>

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
II		<input type="checkbox"/>	?

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — значення загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
- 2) знаходимо шукане значення величини однієї одиниці, або кількості (часу), відповідаємо на запитання задачі, дією ділення

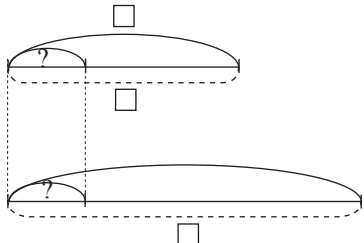
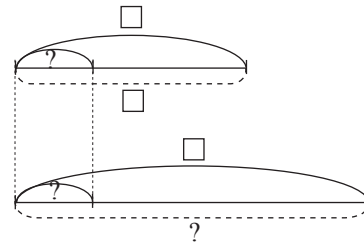
Рис. 9. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є величина однієї одиниці виміру або лічби; кількість або час (однакова величина — загальна величина)

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є значення загальної величини:

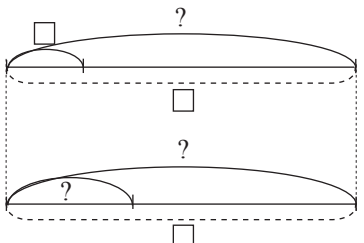
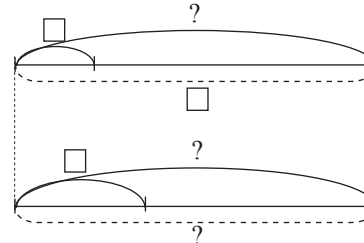
- 1) ці задачі описують два випадки;
- 2) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 3) загальна величина є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числових значення однієї величини;
- 5) дано лише одне числове значення іншої величини, а інше значення є шуканим.

Існує можливість узагальнити математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці або загальна величина (рис. 10).

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>
II	?		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
II		?	<input type="checkbox"/>	II		<input type="checkbox"/>	?

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини за двома відомими величинами одного з випадків;
- 2) відповідаємо на запитання задачі

Рис. 10. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного (однакова величина — величина однієї одиниці вимірювання або лічби; загальна величина)

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного:

- 1) ці задачі описують два випадки;
- 2) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числових значення однієї величини;
- 5) дано лише одне числове значення іншої величини, а інше значення є шуканим.

2.3. Задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є кількість або час.

2.3.1. Зміна однакової величини. однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Припустимо, що купили однакову кількість бананів і апельсинів за ціною 6 грн та 10 грн за кілограм відповідно. Що в цьому випадку можна сказати про вартість? *(Зрозуміло, що вартість бананів і апельсинів буде різною.)*

— Що можна сказати про вартість бананів відносно вартості апельсинів? *(Ціна бананів нижча, ніж ціна апельсинів за однакової кількості, тому так само вартість бананів буде меншою за вартість апельсинів.)*

Задача 3. Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани заплатили 12 грн. Скільки коштують апельсини, якщо ціна бананів 6 грн, а ціна апельсинів 10 грн?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	12 грн	6 грн	?, однакова
А.	?	10 грн	

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: вартість апельсинів буде більшою, ніж 12 грн, тому що ціна апельсинів вища за однакової кількості.

Проаналізувавши математичну структуру отриманої задачі, учні доходять висновку, що вона має всі істотні ознаки задач на знаходження

четвертого пропорційного, тому це задача на знаходження четвертого пропорційного.

Але, на відміну від попередніх, у цій задачі однаковою є кількість. Школярі згадують узагальнений спосіб розв'язання таких задач:

- 1) першою дією дізнаємося про значення однакової величини;
- 2) другою дією відповідаємо на запитання задачі.

— Як вплине зміна однакової величини на розв'язання задачі? (*В задачі 1 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення. В цій задачі однакова величина — кількість, її теж знаходять дією ділення. Тому в цій задачі першою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості) дією ділення, а другою дією відповімо на запитання задачі (дізнаємося про вартість апельсинів) дією множення.*)

Розв'язання.

1) $12 : 6 = 2$ кг — кількість бананів або апельсинів; *однакова величина.*

2) $10 \cdot 2 = 20$ (грн) — вартість апельсинів.

Або $10 \cdot (12 : 6) = 20$ (грн.)

Відповідь: вартість апельсинів — 20 грн.

— Порівняйте цю задачу із задачею 1 (с. 17).

З'ясуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В задачі 1 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення на рівні частини.

У задачі 3 (с. 35) однакова величина — кількість, її теж знаходять дією ділення, але це інший вид ділення — ділення на вміщення. У цій задачі першою дією, дією ділення, дізнаємося про значення однакової величини (кількості), а другою дією, дією множення, відповімо на запитання задачі, дізнаємося про значення загальної величини в другому випадку.

2.3.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

Учням пропонується в задачі 3 (с. 35) змінити величини. Вони складають задачу і з'ясовують, як ця зміна вплине на розв'язання:

розв'язання задачі не змінюється, треба лише «виправити» пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

2.3.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

Учням пропонується змінити числові значення в задачі. Вони пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них підходящі. Далі досліджується вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

2.3.4. Зміна шуканого. Складання і розв'язування обернених задач.

12, 6, $\boxed{20}$, 10 — пряма задача (задача 3, с. 35).

12, 6, 20, $\boxed{10}$ — перша обернена задача до задачі 3 (с. 35).

Учні виконують зміни у короткому записі й формулюють обернену задачу.

Задача. Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани сплатили 12 грн, а за апельсини 20 грн. Яка ціна апельсинів, якщо ціна бананів 6 грн?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	12 грн	6 грн	?, однакова
А.	20 грн	?	

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: ціна апельсинів буде вищою, ніж 6 грн, тому що за однакової кількості за апельсини заплатили більше. Ціна і вартість за сталої кількості змінюються в одному напрямку!

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі і записують розв'язання.

Розв'язання.

1) $12 : 6 = 2$ кг — кількість бананів або апельсинів; *однакова величина.*

2) $20 : 2 = 10$ (грн) — ціна апельсинів.

Або $20 : (12 : 6) = 10$ (грн).

Відповідь: ціна апельсинів — 10 грн.

— Чи отримали ми число, яке було дано в прямій задачі? Який висновок можна зробити? (*Ми розв'язали пряму задачу правильно.*)

— Порівняйте розв'язання прямої й оберненої задач. Чим вони схожі? (*В них однакова перша дія, тому що і в прямій, і в оберненій задачах однакову величину знаходимо за даними відносно купівлі бананів.*)

— Чим вони відрізняються? (*Другими діями. У прямій задачі це дія множення, тому що знаходять вартість апельсинів (щоб знайти вартість, треба ціну помножити на кількість), а в цій задачі — дія ділення, тому що знаходять ціну апельсинів (щоб знайти ціну, треба вартість розділити на кількість).*)

— Складіть і розв'яжіть другу обернену задачу:

12, 6, 20, 10 — друга обернена задача до задачі 3 (с. 35).

Учні вносять зміни у короткий запис задачі й формулюють другу обернену задачу.

Задача. Купили однакову кількість бананів і апельсинів. За банани заплатили 12 грн, а за апельсини 20 грн. Яка ціна бананів, якщо ціна апельсинів 10 грн?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	12 грн	?	?, однакова
А.	20 грн	10 грн	

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: ціна бананів буде нижчою, ніж 10 грн, тому що за однакової кількості вартість бананів менша, ніж вартість апельсинів. Вартість і ціна змінюються в одному напрямку за сталої кількості.

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі і записують розв'язання.

Розв'язання.

- 1) $20 : 10 = 2$ кг — кількість апельсинів або бананів; *однакова величина.*
- 2) $12 : 2 = 6$ (грн) — ціна бананів.

Або $12 : (20 : 10) = 6$ (грн).

Відповідь: ціна бананів — 6 грн.

— Порівняйте другу і першу обернені задачі. Що в них спільного?
(В обох задачах шуканою була ціна.)

— Чим вони відрізняються? (У першій оберненій задачі про однакову величину дізнаються за даними, які відносяться до бананів, а в другій оберненій задачі — за даними, які відносяться до апельсинів.)

Результати узагальнення подано у таблиці (рис. 11):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	□	?, однакова
II	□	?	

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?	?, однакова
II	□	□	

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення величини однієї одиниці, відповідаємо на запитання задачі, дією ділення

Рис. 11. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є величина однієї одиниці вимірювання або лічби (однакова величина — кількість або час)

Далі учні складають третю обернену задачу:

12, $\boxed{6}$, 20, 10 — третя обернена задача до задачі 3 (с. 35).

Задача. Купили однакову кількість бананів і апельсинів за ціною 6 грн та 10 грн за кілограм відповідно. Знайти вартість бананів, якщо вартість апельсинів складає 20 грн.

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	?	6 грн	?, однакова
А.	20 грн	10 грн	

Робимо припущення щодо числового значення шуканої величини: вартість бананів буде меншою, тому що за тієї самої кількості ціна бананів нижча. Ціна і вартість змінюються в одному напрямку за сталої кількості.

Учні застосовують узагальнений план для розв'язання цієї задачі і записують розв'язання.

Розв'язання.

1) $20 : 10 = 2$ кг — кількість апельсинів або бананів; *однакова величина.*

2) $6 \cdot 2 = 12$ (грн) — вартість бананів.

Або $6 \cdot (20 : 10) = 12$ (грн).

Відповідь: вартість бананів — 12 грн.

— Порівняйте цю задачу з прямою.

— Чим вони схожі? (*В обох задачах шуканою є вартість.*)

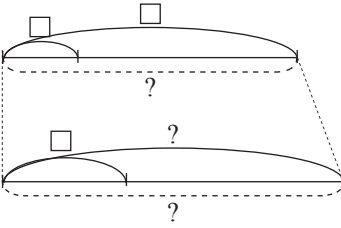
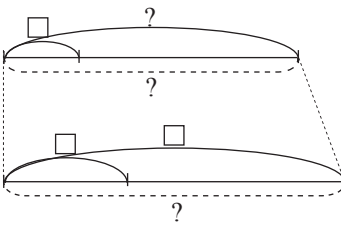
— Чим вони відрізняються? (*У прямій задачі шуканою є вартість апельсинів, а в цій задачі — вартість бананів.*)

Розв'язання відрізняються: хоча перша дія ділення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними, які відносяться до бананів, а в цій — за двома числовими даними, що відносяться до апельсинів. В обох задачах останні дії — множення (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість.)

Результати узагальнення подано у таблиці (рис. 12).

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	□	?, однакова
II	?	□	

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	□	?, однакова
II	□	□	

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на запитання задачі, дією множення

Рис. 12. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є загальна величина (однакова величина — кількість або час)

— Порівняйте другу й третю обернені задачі.

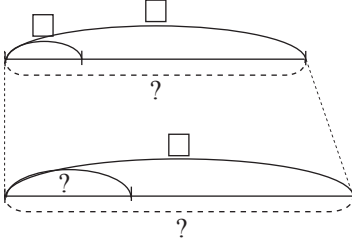
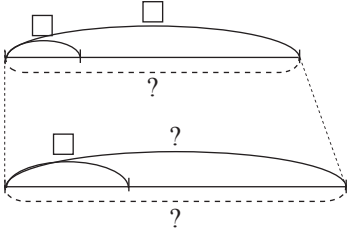
Що в них спільного? (В них однакові перші дії, тому що однакова величина знаходиться за двома числовими даними, які відносяться до апельсинів.)

— Чим вони відрізняються? (Останніми діями. В другій оберненій задачі остання дія — ділення, тому що знаходили ціну (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість), а в третій оберненій задачі остання дія — множення (щоб знайти вартість, треба ціну помножити на кількість).)

Узагальнюємо такі задачі та спосіб їх розв'язання (рис. 13).

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	□	?, однакова
II	□	?	

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	□	?, однакова
II	?	□	

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
- 2) знаходимо шукане значення величини однієї одиниці або загальної величини, відповідаємо на запитання задачі, дією ділення або множення

Рис. 13. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканою є загальна величина або величина однієї одиниці вимірювання чи лічби (однакова величина — кількість або час)

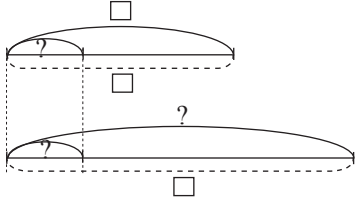
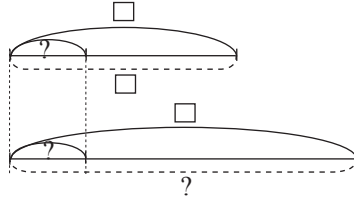
Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу:

- 1) ці задачі описують два випадки;
- 2) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 3) величина кількості або часу є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числових значення однієї величини;
- 5) дано лише одне числове значення іншої величини, а інше значення є шуканим.

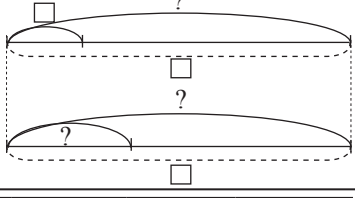
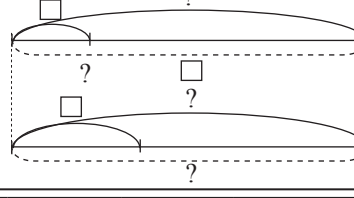
Можна узагальнити математичні структури всіх розглянутих задач на знаходження четвертого пропорційного та спосіб їх розв'язання (рис. 14):

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

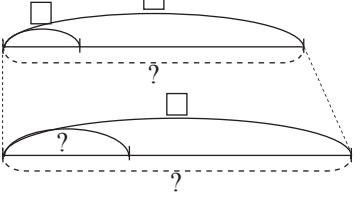
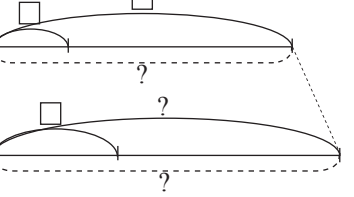
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>
II	?		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	I	?, однакова	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
II		?	<input type="checkbox"/>	II		<input type="checkbox"/>	?

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	?, однакова	I	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	?, однакова
II	<input type="checkbox"/>	?		II	?	<input type="checkbox"/>	

План розв'язання:

- 1) знаходимо значення однакової величини, за двома відомими величинами одного з випадків;
- 2) відповідаємо на запитання задачі

Рис. 14. Опорна схема та план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

I	a	?, однакова	c
II	b		?

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного:

- 1) ці задачі описують два випадки;
- 2) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числових значення однієї величини;
- 5) дано лише одне числове значення іншої величини, а інше значення є шуканим.

3. Розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.

3.1. Ознайомлення зі способом відношень.

Учням пропонується задача на знаходження четвертого пропорційного на знаходження значення загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці, але яку не можна розв'язати способом знаходження однакової (сталой) величини, тому що не можна виконати ділення націло даних числових значень. Учні «впізнають» задачу на знаходження четвертого пропорційного та згадують узагальнений план розв'язання, після чого пробують його застосувати. Виникає проблемна ситуація, яку допомагає розв'язати вчитель, пропонуючи зробити припущення щодо очікуваного результату, але не просто вказати, більше чи менше шукане число за дане, а встановити, у скільки разів воно більше або менше.

Задача. З 10 м тканини кравчиня пошила 3 скатертини. Скільки метрів тканини потрібно на 6 таких скатертин?

Учні розповідають, про що йдеться в задачі; вчитель пропонує записати задачу коротко у вигляді схеми:

10 м — 3 шт.

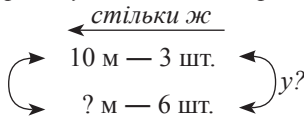
? м — 6 шт.

Учні пояснюють, що означають числа задачі й запитання. Далі з'ясовується, що це задача на знаходження четвертого пропорційного, і згадується узагальнений план розв'язування задач цього типу. Учні

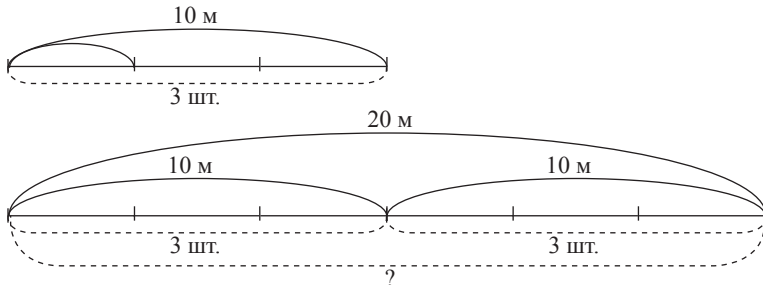
пробують знайти, скільки метрів тканини витрачається на 1 скатертину (значення однакової величини), але це зробити неможливо — 10 не ділиться на 3 націло. Виникає проблемна ситуація, яку допомагає розв'язати вчитель, пропонуючи зробити припущення щодо значення шуканої величини:

— У відповіді на запитання задачі ми отримаємо число більше чи менше за 10? Чому? (*Шукане число більше за 10, тому що скатертин пошили більше, ніж 3.*)

— У скільки разів шукане число більше за 10? (*Шукане число більше за 10 у стільки разів, у скільки 6 скатертин більше, ніж 3 скатертини.*)



Якщо учні не можуть самостійно сформулювати цей висновок, то вчитель радить зробити схематичний малюнок до задачі, позначивши кожен скатертину як одиничний відрізок. Відраховуємо три відрізки і підписуємо зверху, що на них потрібно 10 м. Нижче креслимо відрізок, який містить 6 одиничних відрізків, на ньому відраховуємо також 3 відрізки і підписуємо, що на них потрібно 10 м, потім відраховуємо ще 3 відрізки і підписуємо — 10 м.



— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (*Треба знати два числові значення: I — скільки метрів тканини використали у першому випадку (відомо — 10), та II — у скільки разів більше використали у другому випадку, ніж у першому (невідомо).*)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (*Дією множення.*)

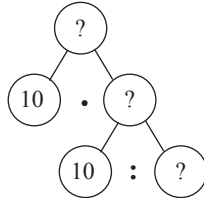
— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (*Ні. Ми не знаємо, у скільки разів більше використали тканини у другому випадку.*)

— Що ми про це можемо сказати? (Тканини використали у стільки разів більше, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку.)

— Що треба знати, аби дізнатися, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому? (Треба знати два числові значення: I — скільки скатертин пошили у другому випадку (відомо — 6), та II — скільки скатертин пошили у першому випадку (відомо — 3).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією ділення.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, нам відомі обидва числові значення. Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.)



— Складіть план розв’язання задачі. (Першою дією, дією ділення, дізнаємось, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому. Робимо висновок: у стільки ж разів більше витратили тканини в другому випадку, ніж у першому. Другою дією, дією множення, дізнаємось, скільки метрів тканини витратили у другому випадку.)

— Запишіть розв’язання задачі по діях із поясненням.

1) $6 : 3 = 2$ — у стільки разів більше пошили скатертин, тому в стільки ж разів більше витратили тканини.

2) $10 \cdot 2 = 20$ (м) — стільки тканини потрібно на 6 скатертин.

Або $10 \cdot (6 : 3) = 20$ (м).

Відповідь: на 6 скатертин потрібно 20 м тканини.

— Розв’язуючи задачу, ми спочатку звернули увагу на відомі два числові значення однієї величини — кількості; визначили, у скільки разів більше (менше) друге значення за перше. Зробили висновок, що у стільки ж разів більше або менше мають бути і числове значення іншої величини — загальної довжини витраченої тканини. І знаючи, у скільки разів більше (менше) шукане число від даного, відповіли на запитання задачі.

— Якою дією ми дізнаємося, у скільки разів більше (менше)? *(Дією ділення.)* В математиці вираз $a : b$ можна прочитати двома способами: «частка чисел a і b » або «відношення a і b ».

— Цей спосіб розв'язання задач називається способом відношень. Хто здогадався, чому він так називається? *(Ми за відношенням відомих двох значень однієї величини встановили, як відносяться значення іншої величини, і відповіли на запитання задачі.)*

— Спосіб відношень застосовується в тому випадку, коли не можна знайти значення однакової величини або коли можна дізнатися, як відносяться одне до одного два числові дані однієї величини.

3.2. Зміна числових даних задачі з метою застосування способу відношень при її розв'язанні.

Задачу на знаходження четвертого пропорційного, в якій однаковою є величина однієї одиниці (задачу 1, с. 17), записуємо схематично (у вигляді пропорції). Робимо припущення щодо очікуваного результату, але дізнатися, у скільки разів більше або менше шукане число за дане значення цієї ж величини, ми не можемо, оскільки неможливо здійснити ділення націло відомих числових значень іншої величини. Тому вчитель пропонує замінити одне з числових значень, щоб можна було про це дізнатися. Учні змінюють одне з даних чисел і розв'язують задачу способом відношень.

Учитель записує задачу 1 у вигляді пропорції:

$$\begin{array}{r} \leftarrow \text{стільки ж} \\ \text{Б. } 50 \text{ грн.} \text{ — } 5 \text{ кг} \\ \text{А. } \quad ? \quad \text{— } 3 \text{ кг} \end{array}$$

— Шукане число більше чи менше за 50 грн? Чому? *(Шукане число менше за 50 грн, тому що купили менше кілограмів апельсинів, ніж бананів.)*

— Чи можна зараз дізнатися, у скільки разів менше купили апельсинів, ніж бананів? Як дізнатися, у скільки разів одне число більше за інше? *(Щоб дізнатися, у скільки разів одне число більше або менше за інше, треба більше розділити на менше. Щоб дізнатися, у скільки разів менше 3 кг, ніж 5 кг, треба 5 кг розділити на 3 кг. Але ці числа націло розділити не можна!)*

— Змініть числові значення кількості так, щоб одне число можна було розділити на друге. (*Припустімо, що апельсинів купили не 3 кг, а 10 кг. Тоді 10 кг можна поділити на 5 кг.*) Маємо:

Задача 1. Купили банани й апельсини за однаковою ціною. За 5 кг бананів заплатили 50 грн. Скільки коштують 10 кг апельсинів?

$$\begin{array}{l} \leftarrow \text{стільки ж} \\ \text{Б. } 50 \text{ грн.} \quad \text{— } 5 \text{ кг} \\ \text{А. } \quad ? \quad \text{— } 3 \text{ кг} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right\} y?$$

— Що в цьому випадку можна сказати про шукане число? (*Шукане число буде більшим за 50 грн, тому що апельсинів купили більше, ніж бананів.*)

— У скільки разів більше купили апельсинів, ніж бананів? Як про це дізнатися? (*Треба 10 кг поділити на 5 кг.*) Це є ключем до розв'язання задачі!

— Розкажіть план розв'язання задачі. (*Першою дією дізнаємося, у скільки разів більше купили апельсинів, ніж бананів. Із цього випливає, що грошей на апельсини витратили у стільки ж разів більше. Другою дією відповімо на запитання задачі й дізнаємося, скільки грошей треба сплатити за 10 кг апельсинів.*)

Розв'язання.

1) $10 : 5 = 2$ — у стільки разів 10 кг більше, ніж 5 кг, тому в стільки ж разів шукане число більше за 50 грн.

2) $50 \cdot 2 = 100$ (грн) — сплатили за 10 кг апельсинів.

Або $50 \cdot (10 : 5) = 100$ (грн).

Відповідь: треба заплатити 100 грн за 10 кг апельсинів.

— Змініть величини задачі. Припустімо, йтиметься про витрату тканини на чоловічі та жіночі карнавальні костюми.

Учні складають задачу.

— Як зміна величин вплине на розв'язання задачі? Чи потрібно розв'язувати цю задачу? (*Арифметичні дії вже виконали, залишилося тільки «виправити» пояснення.*)

— Про що ми дізнаємося в першій дії? (*У скільки разів більше пошили жіночих костюмів, ніж чоловічих. Із цього випливає, що у стільки ж разів більше тканини витратили на жіночі костюми, ніж на чоловічі.*)

— Про що ми дізнаємося в другій дії? (*Скільки метрів тканини пішло на жіночі костюми — відповімо на запитання задачі.*)

Далі вчитель пропонує змінити числові дані задачі й дослідити, як ця зміна впливає на план розв'язання. Діти доходять висновку, що план розв'язання задачі залишається тим самим.

Першою дією дізнаємося про відношення двох відомих чисел стосовно однієї величини й робимо висновок, що в такому самому відношенні й перебуває й інша пара числових значень другої величини. Другою дією відповідаємо на питання задачі.

Цей спосіб розв'язання називається способом відношення, тому що ключем до розв'язання задачі є знаходження кратного відношення пари числових даних певної величини.

Порівнявши розв'язання цих задач, узагальнюємо спосіб розв'язання.

Для розв'язання задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень треба:

- 1) дізнатися, у якому кратному відношенні знаходяться два відомі числові дані однієї з величин; зробити висновок, що у стільки ж разів шукане число більше (менше) за дане значення іншої величини;
- 2) відповісти на запитання задачі.

3.3. Зміна шуканого. Складання і розв'язання обернених задач.

50, 5, 100, 10 — пряма задача (задача 1, с. 48).

50, 5, 100, 10 — перша обернена задача до задачі 1 (с. 48).

Задача. Купили банани й апельсини за однаковою ціною. За 5 кг бананів заплатили 50 грн. Скільки кілограмів апельсинів можна купити на 100 грн?

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{стільки ж}} \\
 \text{Б. } 50 \text{ грн} - 5 \text{ кг} \\
 \text{А. } 100 \text{ грн} - ?
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow y? \\
 \leftarrow y?
 \end{array}$$

— Як ця зміна впливає на розв'язання задачі? (*Тут відома пара чисел стосовно вартості, тому ми першою дією дізнаємося, у скільки разів 100 грн більше, ніж 50 грн, і зробимо висновок, що у стільки ж разів шукане число більше за 5 кг. Другою дією відповімо на запитання задачі.*)

Учні застосовують узагальнений план розв'язання задачі способом відношень.

Розв'язання.

1) $100 : 50 = 2$ — у стільки разів більше 100 грн, ніж 50 грн, тому в стільки ж разів більше шукане число, ніж 5 кг.

2) $5 \cdot 2 = 10$ (кг) — стільки апельсинів купили.

Або $5 \cdot (100 : 50) = 10$ (кг).

Відповідь: на 100 грн можна купити 10 кг апельсинів.

— Порівняйте цю задачу з прямою задачею. Що спільне в їх розв'язаннях? (Ці задачі розв'язуються однаковими арифметичними діями: перша дія — ділення, а друга — множення.)

— Чим відрізняються розв'язання цих задач? (Для знаходження числового значення відношення застосовуються різні пари числових значень: у прямій задачі ми про це дізнавалися за двома числовими даними кількості, а в оберненій — за двома числовими даними вартості. Крім того, в цих задачах різні шукані.)

Далі учні складають другу обернену задачу:

50, 5, 100, 10 — друга обернена задача до задачі 1 (с. 48)

Задача. Купили за однаковою ціною банани і апельсини. Скільки треба заплатити за 5 кг бананів, якщо за 10 кг апельсинів заплатили 100 грн?

	$\xrightarrow{\text{стільки ж}}$	
Б.	? — 5 кг	$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} y?$
А.	100 грн — 10 кг	

Учні застосовують узагальнений план розв'язання.

Розв'язання.

1) $10 : 5 = 2$ — у стільки разів менше 5 кг, ніж 10 кг, тому в стільки ж разів шукане число менше, ніж 100 грн.

2) $100 : 2 = 50$ (грн) — вартість 5 кг бананів.

Або $100 : (10 : 5) = 50$ (грн).

Відповідь: за 5 кг бананів треба заплатити 50 грн.

— Порівняйте цю задачу з прямою задачею. Що спільного в їх розв'язаннях? (Числове значення відношення дізнаються однією й тією самою дією за двома числовими даними кількості: $10 : 5$.)

— Чим вони відрізняються? (Різний характер відношення: у прямій задачі — «у стільки разів більше», а в цій оберненій задачі — «у стільки разів менше». Крім того, в цих задачах шуканими є різні числові значення вартості.)

Складаємо і розв'язуємо третю обернену задачу:

50, 5, 100, 10 — третя обернена задача до задачі 1 (с. 48).

Задача. Купили банани і апельсини за однаковою ціною. Скільки кілограмів бананів можна купити на 50 грн, якщо на 100 грн купили 10 кг апельсинів?

$$\begin{array}{r}
 \xrightarrow{\text{стільки ж}} \\
 \text{Б. } 50 \text{ грн} \text{ — ?} \\
 \text{А. } 100 \text{ грн} \text{ — } 10 \text{ кг}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \\
 \leftarrow \\
 \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 y?
 \end{array}$$

Розв'язання.

1) $100 : 50 = 2$ — у стільки разів менше 50 грн, ніж 100 грн, тому в стільки ж разів шукане число менше, ніж 10 кг.

2) $10 : 2 = 5$ (кг) — купили бананів.

Або $10 : (100 : 50) = 5$ (кг).

Відповідь: на 50 грн купили 5 кг бананів.

— Порівняйте третю обернену задачу з першою оберненою задачею. Що спільного в їх розв'язаннях? (Числове значення відношення дізнаються однією й тією самою дією за двома числовими даними вартості: $100 : 50$.)

— Чим вони відрізняються? (Різний характер відношення: в першій оберненій задачі — «у стільки разів більше», а в цій оберненій задачі — «у стільки разів менше». Крім того, в цих задачах шуканими є різні числові значення кількості.)

Порівнявши всі ці задачі, узагальнюємо план розв'язання:

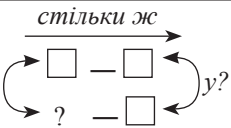
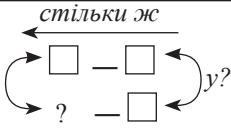
<p style="text-align: center;"><i>стільки ж</i></p> 	<p>План розв'язання (спосіб відношень):</p> <p>1) дізнаємося, у скільки разів одне з даних чисел більше або менше від другого числа, відносно однієї величини, зробимо висновок, що у стільки ж разів шукане число більше або менше за дане значення іншої величини;</p> <p>2) відповідаємо на запитання задачі</p>
<p style="text-align: center;"><i>стільки ж</i></p> 	

Рис. 15. Розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом відношень

Далі учням пропонується порівняти два способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні згадують, як вони розв'язували задачу 1 (с. 48) та обернені до неї задачі першим способом, і встановлюють, що «ключем» до розв'язання було знаходження однакової величини, а у другому способі «ключем» є числове значення і характер кратного відношення двох відомих числових даних однієї з величин і висновок про таке саме кратне відношення шуканого числа і відомого числового значення. Для знаходження однакової величини ми користувалися двома числовими даними різних величин стосовно одного з випадків, а для знаходження числового значення кратного відношення ми користувалися двома числовими даними однієї й тієї самої величини.

3.4. З'ясування умов застосування способу знаходження однакової величини та способу відношень.

Далі слід узагальнити можливі способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного. Результати узагальнення подані у таблиці (рис. 16).

Учні розв'язують задачі двома способами і досліджують умови можливості застосування кожного з них.

Спосіб знаходження однакової величини не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло числових даних двох величин стосовно одного з випадків. Спосіб відношень не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло двох числових даних однієї величини.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного	
$a - b$ $c - d$ <p>де шуканим є або a, або b, або c, або d</p>	
<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) першою дією знаходимо значення однакової величини за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків; 2) другою дією відповідаємо на запитання задачі 	<p>План розв'язання (спосіб відношень):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) першою дією дізнаємося про числове значення кратного відношення між двома відомими числовими даними однієї з величин. Робимо висновок про числове значення і характер відношення між шуканим і числовим даним стосовно другої величини; 2) другою дією відповідаємо на запитання задачі

Рис. 16. Способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного

4. Формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Учні аналізують математичну структуру задачі, впізнають її, згадують узагальнений план розв'язання таких задач і застосовують його.

Значну увагу на цьому етапі слід приділити розв'язуванню задач двома способами: способом знаходження однакової величини та способом відношень; складанню і розв'язуванню обернених задач — перетворенню задачі одного виду на задачу другого виду. На даному етапі пропонуємо учням задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є загальна величина, кількість або час.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПРОПОРЦІЙНЕ ДІЛЕННЯ

4 КЛАС

1. Підготовча робота до введення задач на пропорційне ділення.

Мета підготовчої роботи полягає в актуалізації знань, умінь та навичок учнів, а саме:

- знання взаємозв'язку між основними групами величин, які перебувають у пропорційній залежності;
- уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини (зведення до одиниці):
 - аналізуючи умову задачі, виділяти однакову величину;
 - складати короткий запис задачі у формі таблиці;
 - у ході пошуку способу розв'язання задачі усвідомлювати, що для відповіді на запитання задачі треба знати значення однакової величини, яке можна знайти за даними числовими значеннями двох величин стосовно іншого випадку.

Усі перелічені знання та вміння можна актуалізувати під час розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини.

Задача. За три дні швачка пошила 27 сарафанів. Скільки днів їй потрібно, щоб пошити 135 сарафанів, якщо вона працюватиме з тією ж продуктивністю?

— Про що говориться в задачі? (*В задачі йдеться про швачку, яка першого разу шила сарафани три дні й пошила 27 штук, а другого разу пошила 135 штук, причому кожен раз працювала з однаковою продуктивністю. Запитується, скільки днів вона шила сарафани другого разу, тобто за скільки днів вона пошила 135 штук.*)

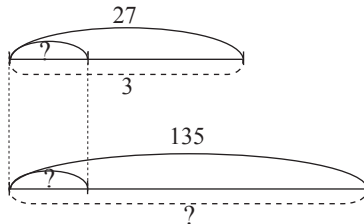
Сюжетні задачі, що містять сталу величину

— Які величини описують ситуацію задачі? (*В задачі є такі величини: кількість сарафанів, продуктивність праці — кількість сарафанів, пошитих за 1 день, час — кількість днів.*)

— Яка величина є однаковою? (*Однакова величина — продуктивність праці швачки, оскільки в умові задачі сказано, що вона працює з однаковою продуктивністю.*)

— Запишіть задачу коротко у формі таблиці й зробіть схему.

	Загальний виробіток — кількість сарафанів (шт.)	Продуктивність праці — кількість сарафанів, пошитих за 1 день (шт.)	Час роботи (дні)
I	27 шт.	?, однакова	3 дні
II	135 шт.		?



— За коротким записом поясніть числа задачі. (*Число 27 позначає кількість сарафанів, які були пошиті першого разу; число 135 позначає кількість сарафанів, пошитих другого разу; число 3 позначає час, за який швачка пошила сарафани першого разу, тобто кількість днів, за які було пошито 27 сарафанів.*)

— Що позначає однакова величина? (*Однакова величина — продуктивність праці, тобто швачка першого і другого разу працювала з тим самим виробітком — вона шила щодня однакову кількість сарафанів.*)

— Як пов'язані між собою величини? (*Щоб знайти час роботи, слід загальний виробіток розділити на продуктивність праці.*)

Якщо учні «впізнали» задачу на знаходження четвертого пропорційного, то актуалізуємо загальний план її розв'язання і застосуємо для даної задачі.

— Яке запитання задачі? Яке число ми отримаємо у відповіді — більше чи менше за число 3? (*В задачі запитується: за скільки днів швачка пошиє 135 сарафанів? У відповіді отримаємо число, більше*

за 3, тому що за однакової продуктивності праці другого разу швачка пошила більше сарафанів, ніж першого, отже, і час роботи другого разу буде більший.)

— Чи «впізнали» ви задачу? (Це задача на знаходження четвертого пропорційного.)

— За яким планом розв'язуються задачі на знаходження четвертого пропорційного? Розкажіть план розв'язання цієї задачі.

Якщо певна частина учнів класу має труднощі з розв'язанням, то для них здійснюємо аналітичний пошук способу розв'язання задачі з наступним складанням плану розв'язання.

— Що достатньо знати, аби відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числових значення: I — кількість сарафанів (135 шт.), та II — продуктивність праці, тобто кількість сарафанів, пошитих за 1 день (невідомо).)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Відповімо дією ділення, оскільки щоб знайти час, треба загальний виробіток розділити на продуктивність праці.)

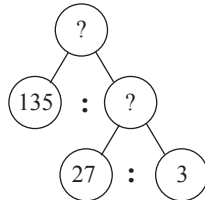
— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, не можна, тому що нам невідома продуктивність праці, яка є однаковою величиною для обох випадків. Її можна знайти за двома величинами 1-го випадку.)

— Що треба знати, аби знайти продуктивність праці? (Треба знати два числових значення: I — кількість сарафанів, пошитих швачкою першого разу (27 шт.), та II — час, який працювала швачка першого разу (3 дні).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Відповімо дією ділення, оскільки щоб знайти продуктивність праці швачки, треба загальний виробіток розділити на час роботи.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, можна, тому що ми знаємо обидва числові значення. Аналіз закінчено.)

Зазначимо, що така робота супроводжується схемою аналізу:



— Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією ми знайдемо однакову величину — продуктивність праці, тобто кількість сарафанів, які шила швачка за один день. Другою дією ми відповімо на запитання задачі, тобто з'ясуємо, скільки днів працювала швачка другого разу, коли вона пошила 135 сарафанів.)

— Запишіть розв'язання задачі по діях із поясненням.

1) $27 : 3 = 9$ (шт.) — сарафанів шила швачка кожен день; однакова величина.

2) $135 : 9 = 15$ дн. — час роботи швачки другого разу. (Зазначимо, що тут ми отримаємо абстрактне число, тому що ділимо на вміщення.)

— Складіть обернену задачу до даної так, щоб невідомим була кількість сарафанів, пошитих швачкою першого разу, тобто за 3 дні.

Аналогічно працюємо над наступними задачами.

Задача. За 7 м стрічки заплатили 56 грн. Скільки метрів такої самої стрічки можна купити на 104 грн?

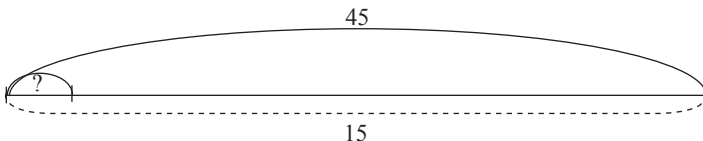
Задача. Автомобіль за 6 год проїхав 342 км. На скільки кілометрів більше він проїде за 9 год, якщо їхатиме весь час з однаковою швидкістю?

У результаті розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного учні доходять висновку, що коли в задачі є однакова (стала) величина для кількох випадків, то ключем до її розв'язання є знаходження її значення. Однакову величину можна знайти за відомими числовими значеннями двох величин стосовного іншого випадку.

Одним із завдань підготовчої роботи є вироблення в молодших школярів **уміння знаходити однакову величину за двома сумами**. Розв'язати це завдання можна за допомогою системи завдань.

Задача. За два дні у кіоску продали 15 ручок за однаковою ціною. За них загалом одержали 45 грн. Знайти ціну ручки.

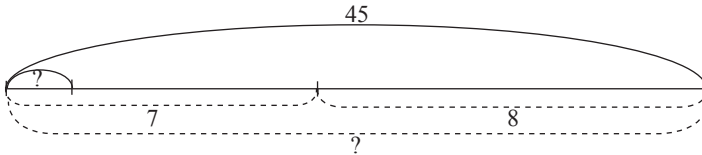
Записуємо задачу коротко у формі таблиці й будуємо схему:



Міркуємо так: щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість. Нам відома вартість ручок (45 грн) та їх кількість (15 шт.), дією ділення відповімо на запитання задачі:

$$45 : 15 = 3 \text{ (грн)} \text{ — ціна ручки.}$$

Задача. За два дні у кіоску продали 7 чорних ручок та 8 синіх за однаковою ціною. За них разом одержали 45 грн. Знайти ціну ручки.



— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що змінилося? Як ця зміна вплине на розв’язання? Для того щоб відповісти на запитання задачі, потрібно виконати ще одну арифметичну дію і дізнатися, скільки всього ручок продали. Таким чином, у цій задачі однакою величину — ціну — ми шукатимемо за двома сумарними значеннями вартості й кількості — за двома сумами!

Наступним кроком є відпрацювання в учнів уміння знаходити однакою величину за двома сумами на задачах такого типу:

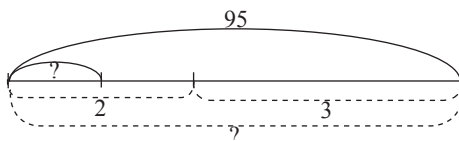
Задача. В одному класі 12 учнів, а в другому 15. Разом в учнів обох класів 135 підручників. Скільки підручників у одного учня, якщо кожен учень цих класів має однакою кількість підручників?

Задача. З двох ділянок зібрали 120 кг картоплі. Площа першої ділянки становить 25 квадратних метрів, а другої — 15 квадратних метрів. Скільки кілограмів картоплі зібрали з 1 квадратного метра, якщо з кожного квадратного метра цих ділянок збирали однакою масу картоплі?

Задача. В перший день на станцію прийшло 2 вагони з вугіллям, а в другий — 3 вагони. Взагалі за два дні привезли 95 т вугілля. Знайти масу одного вагону вугілля, якщо маса кожного з вагонів, які прибули на станцію у перший та другий дні, однакова.

Розглянемо методику роботи над останньою задачею, починаючи з пошуку розв’язання задачі.

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	2 шт.	?, однакова	95 т
II	3 шт.		



— Як можна знайти однакову величину — масу одного вагона? Згадайте, як ми знаходили однакову величину в попередніх задачах — задачах на знаходження четвертого пропорційного. Чи можна і в цій задачі таким самим чином знайти значення однакової величини? (У попередніх задачах ми знаходили значення однакової величини за даними двох величин одного з випадків, про які говорилося в задачі: 1-го або 2-го дня.)

Але в цій задачі для кожного з випадків не дано значення обох величин, а є лише значення однієї величини для обох випадків — кількості вагонів — і загальне значення другої величини — загальної маси вугілля, тому ми не можемо так само, як раніше, знайти однакову величину.)

— Але для знаходження однакової величини — маси одного вагона вугілля — треба все ж таки знати значення двох інших величин: загальної маси вугілля і кількості вагонів. Якщо ми не знаємо значення двох інших величин для кожного окремого випадку — 1-го або 2-го дня, може, застосувати значення цих величин не для кожного випадку окремо, а взагалі для обох? Які два числових значення потрібно знати, щоб знайти значення однакової величини? (Треба знати два числових значення: I — суму загальних мас вугілля, яку привезли за обидва дні (95 т), та II — суму значень кількості вагонів (невідомо).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Відповімо дією ділення: щоб знайти масу одного вагона, треба суму загальної маси розділити на сумарну кількість вагонів.)

— Чи можна відповісти на це запитання відразу? (Ні, не можна, тому що нам невідома сумарна кількість вагонів, що прийшли на станцію за обидва дні.)

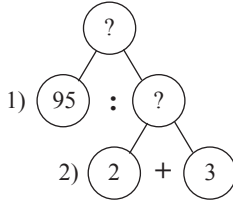
— Що потрібно знати, аби знайти сумарне значення кількості вагонів? (Треба знати два числових значення: I — кількість вагонів, які прибули першого дня (2), та II — кількість вагонів, які прибули другого дня (3).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що нам відомі обидва числові значення.)

— Складіть план розв'язання задачі. (Першою дією ми узнаємо загальну кількість вагонів, що прийшли на станцію за два дні. Другою дією ми відповімо на запитання задачі — знайдемо масу вугілля в 1-му вагоні.)

Міркування ілюструються схемою аналізу:



Якщо на етапі підготовчої роботи розв'язувати з учнями задачі такого типу, тоді під час ознайомлення із задачами на пропорційне ділення учням залишиться перенести вже відомий засіб знаходження однакової величини в нову ситуацію. На цьому заснований один з варіантів методики ознайомлення учнів із задачами на пропорційне ділення: після розв'язання цієї задачі вчитель змінює її запитання: «Скільки тонн вугілля привозили на станцію кожного дня?» Діти помічають, що це запитання включає в себе два запитання: 1) скільки тонн вугілля привезли першого дня; 2) скільки тонн вугілля привезли другого дня?

З'ясуємо, що зміна запитання обумовлює необхідність виконання ще двох арифметичних дій: третьою дією (дією множення) відповімо на перше запитання задачі, а четвертою (дією множення) — на друге запитання. Таким чином, одержана задача є продовженням попередньої з тією відмінністю, що шуканих два — це значення загальної величини для кожного з випадків, а не значення величини однієї одиниці вимірювання або лічби, однакової величини. Спільним є те, що для відповіді на ці два запитання необхідно знати значення однакової величини.

Таким чином, такі задачі розв'язуються за планом: першою дією знаходимо суму числових значень кількості (другу суму); другою — значення однакової величини — величини однієї одиниці вимірювання або лічби; третьою — відповідаємо на перше запитання задачі; четвертою — на друге.

Але ознайомлення із задачами на пропорційне ділення можна здійснити по-іншому: перетворивши задачу на знаходження четвертого пропорційного на задачу на пропорційне ділення. Розглянемо цей варіант методики детальніше.

2. Ознайомлення із задачами на пропорційне ділення.

2.1. Задачі, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення загальної величини.

2.1.1. Знаходження сумарного значення загальної величини, включення його в задачу і вимога знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків.

Учні розв'язують задачу на знаходження четвертого пропорційного на знаходження загальної величини (задача 1), в якій однаковою є величина однієї одиниці, способом знаходження однакової (сталой) величини. Після розв'язання цієї задачі вчитель пропонує знайти сумарне значення загальної величини і включити його в задачу, при цьому змінити вимогу — знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного перетворюється на короткий запис нової задачі. За коротким записом складається задача на пропорційне ділення — задача 2.

Задача 1. Першого дня на базу привезли 2 вагони вугілля, маса якого — 38 т. Другого дня привезли 3 таких самих вагони вугілля. Скільки вугілля привезли другого дня?

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	2 шт.	?, однакова	38 т
II	3 шт.		?

Ця задача розв'язується усно, і діти дізнаються, що другого дня привезли 57 т вугілля.

У короткому записі попередньої задачі вчитель замість знака запитання записує знайдене числове значення:

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	2 шт.	?, однакова	38 т
II	3 шт.		57 т

Після цього вчитель пропонує учням дізнатися, скільки вугілля привезли на базу за два дні.

Діти дізнаються, що за два дні на базу привезли 95 т вугілля. Це числове значення заноситься у короткий запис:

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	2 шт.	?, однакова	?
II	3 шт.		?

} 95 т

Таким чином, короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного поступово перетворюється на короткий запис задачі на пропорційне ділення.

Діти під керівництвом вчителя складають задачу за коротким записом.

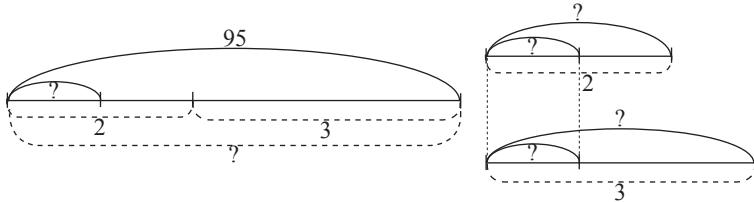
Задача 2. За два дні на базу привезли 95 т вугілля. В перший день привезли 2 вагони, а в другий — 3 вагони. Скільки тонн вугілля привозили кожного дня, якщо маса всіх вагонів була однаковою?

Учитель повідомляє, що задача, яку було складено, — це задача нового виду на пропорційне ділення. Він зауважує, що ці задачі не зовсім звичайні: в них запитання містить слово «кожен», і тому воно розпадається на два запитання. А якщо в задачі два запитання, то, розв'язавши її, маємо отримати і дві відповіді.

— За коротким записом поясніть числа задачі. Що позначає однакова величина? (Число 2 позначає кількість вагонів з вугіллям, які прибули на станцію першого дня. Число 3 позначає кількість вагонів з вугіллям, які прибули другого дня. Число 95 позначає загальну масу вугілля, яке привезли за обидва дні. Однакова величина позначає, що маса 1 вагона вугілля однакова і в перший, і в другий день, тобто кожен вагон вміщує однакову кількість тонн вугілля.)

— Яке запитання задачі? (Скільки тонн вугілля привозили кожного дня?)

— На які два запитання воно розпадається? (1. Скільки тонн вугілля привезли першого дня? 2. Скільки тонн вугілля привезли другого дня?)



— Чи можна відразу відповісти на два запитання? (Ні, неможливо.)

— Тому відповімо спочатку на 1-ше запитання, а потім на 2-ге.

— Зробимо припущення щодо числових значень шуканої величини. За однакової маси вагонів у перший день привезли меншу їх кількість, ніж у другий, тому й загальна маса вугілля, привезеного першого дня, буде більшою від загальної маси вугілля, що привезли другого дня. За однакової маси одного вагону загальна маса і кількість змінюються в одному напрямку.

— Поміркуйте, що достатньо знати, аби відповісти на перше запитання задачі: скільки тонн вугілля привезли на базу першого дня? (Треба знати два числових значення: I — масу 1 вагона (невідомо), та II — скільки вагонів привезли першого дня (2).)

— Якою арифметичною дією відповімо на перше запитання задачі? (Дією множення, оскільки щоб знайти загальну масу, треба масу 1 вагона помножити на кількість вагонів.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Ні, не можна, тому що ми не знаємо однакову величину — масу 1 вагона.)

— Що потрібно знати, аби знайти однакову величину — масу одного вагона? (Треба знати два числових значення: I — загальну масу вугілля, яку привезли за обидва дні (95 т), та II — сумарне значення кількості вагонів (невідоме).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Відповімо дією ділення, оскільки щоб знайти масу одного вагона, треба загальну масу розділити на загальну кількість вагонів.)

— Чи можна відповісти на це запитання відразу? (Ні, не можна, тому що ми не знаємо сумарної кількості вагонів.)

— Що потрібно знати, аби знайти суму значень кількості вагонів? (Треба знати два числових значення: I — кількість вагонів, які привезли першого дня (2), та II — кількість вагонів, які привезли другого дня (3).)

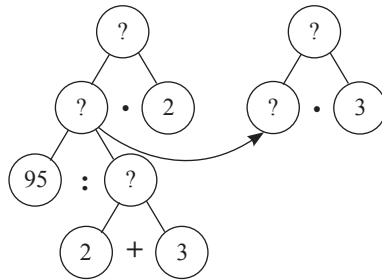
— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання.)

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що нам відомі обидва числові значення.)

— Чи на всі запитання задачі ми відповіли? Що достатньо знати, аби відповісти на друге запитання задачі? (Достатньо знати два числових значення: I — масу одного вагона (ми її знайдемо, коли відповідатимемо на перше запитання задачі), та II — кількість вагонів, які привезли другого дня (3).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення.)

Міркування учнів ілюструються схемою аналізу:



— Складіть план розв’язання задачі. (Першою дією ми узнаємо суму кількості вагонів з вугіллям, які було привезено за два дні. Другою дією ми узнаємо значення однакової величини, тобто масу вугілля в 1 вагоні. Третьою дією ми узнаємо масу вугілля, яке було привезено першого дня. Четвертою дією — масу вугілля, яке було привезено другого дня.)

- 1) $2 + 3 = 5$ (ваг.) — всього привезли за два дні; друга сума.
- 2) $95 : 5 = 19$ (т) — маса 1 вагона; однакова величина.
- 3) $19 \cdot 2 = 38$ (т) — привезли в 1-й день.
- 4) $19 \cdot 3 = 57$ (т) — привезли в 2-й день.

Після розв'язання задачі перевіряємо правильність зробленого припущення. Учні підтверджують, що в перший день привезли 38 т вугілля, що менше, ніж 57 т вугілля, яке привезли у другий день.

Відповідь: першого дня привезли 38 т вугілля, а другого дня — 57 т.

У цих задачах можна робити пряму перевірку правильності розв'язання через знаходження суми знайдених числових значень: якщо одержане число збігається з даним у задачі сумарним значенням цієї величини, то задачу розв'язано правильно.

Наприклад: $38 + 57 = 95$ (т) — одержали число, яке дано у задачі.

— Порівняйте задачу на пропорційне ділення і задачу на знаходження четвертого пропорційного. Як ми отримали задачу на пропорційне ділення із задачі на знаходження четвертого пропорційного? (*Шляхом перетворення задачі на знаходження четвертого пропорційного.*)

Задача на знаходження четвертого пропорційного має такі істотні ознаки:

- 1) наявність трьох взаємопов'язаних величин;
- 2) два випадки;
- 3) одна з величин (в даному випадку величина однієї одиниці) є однаковою для обох випадків;
- 4) стосовно одного випадку дано значення двох величин;
- 5) стосовно другого випадку дано числове значення однієї величини, а значення іншої величини є шуканим.

У задачі на знаходження четвертого пропорційного ми виконали такі зміни: шуканими стали два числові значення однієї величини (загальної величини), але ми задали їх суму.

Припускаємо, що задачам на пропорційне ділення властиві такі істотні ознаки:

- 1) наявність трьох взаємопов'язаних величин;
- 2) два випадки;
- 3) одна з величин є однаковою (у цьому випадку величина однієї одиниці) для обох випадків;
- 4) стосовно однієї величини (у цій задачі — кількості або часу) дано два числові значення для обох випадків;
- 5) стосовно іншої величини (у цій задачі — загальної величини) два числові значення є шуканими, але дано їх суму.

— За яким планом ми розв'язували задачу на знаходження четвертого пропорційного? *(Задачу на знаходження четвертого пропорційного ми розв'язували за планом:*

- 1) знаходили значення однакової величини — величини однієї одиниці за двома відомими величинами в одному з випадків;
- 2) відповідали на запитання задачі, знаходили значення загальної величини.)

— Як зміна умови задачі вплинула на план розв'язання? За яким планом ми розв'язували задачу на пропорційне ділення? Розв'язуючи задачу на пропорційне ділення, ми не можемо однакової величини знаходити за двома відомими величинами одного з випадків, тому однакової величини ми знаходимо за двома сумарними значеннями двох інших величин.

Таким чином, зміна умови задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини.

Задачу на пропорційне ділення ми розв'язували за планом:

- 1) знаходили суму даних числових значень іншої величини — кількості або часу;
- 2) знаходили однакової величину (величину однієї одиниці) за двома сумами;
- 3) відповідали на перше запитання задачі;
- 4) відповідали на друге запитання задачі.

— Що спільного у розв'язаннях задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення? *(В обох задачах щоб відповісти на запитання, треба знати значення однакової величини, але воно знаходиться різними способами:*

- за двома числовими значеннями двох величин одного з випадків;
- за двома сумарними значеннями двох величин.)

Результати узагальнення подані у таблиці (рис. 17).

2.1.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

Робота відбувається так само, як під час навчання розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного				Задачі на пропорційне ділення			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, однакова	□	I	? } □	?, однакова	□
II	?		□	II	? } □		□
<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці — за двома числовими значеннями одного з випадків; знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на запитання задачі 				<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> знаходимо суму даних числових значень однієї з величин — кількості або часу; знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці — за сумарними значеннями двох величин; знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі; знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі 			

Рис. 17. Зіставлення математичних структур та способів розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення

— Складіть задачу з тими самими числами, що й у задачі 2 (с. 62), але про купівлю іграшок для дівчаток та хлопчиків. Якщо в задачі йдеться про купівлю, то які величини вона містить? (*Ціна, кількість, вартість.*)

Учитель вносить зміни у короткий запис задачі:

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Д.	2 шт.	?, однакова	? } 95 грн
Х.	3 шт.		? }

Задача. За іграшки для дівчаток та хлопчиків сплатили 95 грн. Для дівчаток купили 2 ляльки, а для хлопчиків — 3 машинки. Скільки заплатили за ляльки і скільки за машинки, якщо ціна цих іграшок однакова?

— Чи є необхідність розв’язувати цю задачу? (*Розв’язок цієї задачі вже є на дошці! Треба виправити пояснення.*)

1) $2 + 3 = 5$ (шт.) — всього купили іграшок; *друга сума.*

2) $95 : 5 = 19$ (грн) — ціна 1 іграшки: або ляльки, або машинки; *однакова величина.*

3) $19 \cdot 2 = 38$ (грн) — вартість ляльок.

4) $19 \cdot 3 = 57$ (грн) — вартість машинок.

Відповідь: за ляльки заплатили 38 грн і за машинки — 57 грн.

— Порівняйте пояснення в першій і другій задачах. Що цікавого ви помітили? (*Першою дією ми узнали сумарне значення іншої величини (другу суму). Другою дією ми узнали однакову величину. Третьою дією ми відповіли на перше запитання задачі, а четвертою — на друге.*)

2.1.3. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв’язання задачі.

Робота відбувається так само, як під час навчання розв’язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Змінимо числові значення в цій задачі і ключові слова.

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Ч.	5 шт.	?, однакова	? } 144 грн
С.	7 шт.		? }

Задача. Для подарунків учням купили 5 червоних ручок і 7 синіх. За всі ручки заплатили 144 грн. Скільки заплатили за червоні ручки і скільки за сині окремо, якщо ціна ручок однакова?

Робимо припущення щодо числових значень шуканих величин. Вартість червоних ручок буде меншою, тому що за однакової ціни їх купили меншу кількість. Вартість синіх ручок буде більшою, тому що за однакової ціни їх купили більшу кількість. За однакової ціни кількість і вартість змінюються в одному напрямку.

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що цікавого ви помітили? *(В обох задачах ідеться про купівлю, тому вони містять однакові величини. В обох задачах є однакова величина, дані два числові значення кількості (для кожного з випадків), а для вартості — лише загальне значення (перша сума); значення вартості для обох випадків треба знайти. У цих задачах по два запитання.)*

— Порівняйте цю задачу з першою. Що в них спільного? *(У них дуже схожі структури коротких записів — обидві таблиці містять взаємопов'язані величини, одна з величин є однаковою для обох випадків; дані два значення однієї з величин (стосовно кожного випадку), а для іншої — лише сумарне значення (перша сума). Значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. Ця задача містить два запитання.)*

— Якщо ці задачі дуже схожі за математичною структурою, то вони належать до одного виду — до **задач на пропорційне ділення**. Отже, як упізнати задачу на пропорційне ділення? Що в ній має бути? *(Мають описуватися два випадки (два ключових слова); три взаємопов'язані величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно іншої величини мають бути дані два значення, а для третьої — загальне значення (перша сума); треба відшукати значення цієї величини для кожного з двох випадків. Ці задачі повинні містити два запитання.)*

— Як розв'язуємо задачі на пропорційне ділення? За яким планом? *(Першою дією узнаємо сумарне значення іншої величини (другу суму). Другою дією узнаємо значення однакової величини за двома сумами. Третьою дією відповідаємо на перше запитання задачі, а четвертою — на друге.)*

Після розв'язання задачі перевіряємо правильність зробленого припущення.

Таким чином, здійснивши дослідження задач на пропорційне ділення і засобом зміни величин або числових даних задачі, ми

знайшли підтвердження того, що їхні істотні ознаки збігаються. Крім того, не змінився і план розв'язування задачі.

2.2. Задачі, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення кількості або часу.

2.2.1. Знаходження сумарного значення кількості, включення його в задачу і вимога знайти значення кількості для кожного з двох випадків.

У задачі 1 (с. 61) на знаходження четвертого пропорційного відбуваються такі зміни: значення кількості або часу для обох випадків стають шуканими, але дано їх суму; значення загальної величини відомі для обох випадків. Ці зміни виконуються у короткому записі задачі, й учні складають задачу за коротким записом. У короткій записі задачі 1 вписуємо числове значення шуканого:

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	2 шт.	?, однакова	38 т
II	3 шт.		57 т

Після цього вчитель пропонує учням дізнатися, скільки вагонів вугілля привезли на базу за два дні. Діти дізнаються, що за два дні на базу привезли 5 вагонів. Це числове значення заноситься у короткий запис:

Дні	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
I	? } 5 шт.	?, однакова	38 т
II	? }		57 т

Задача 3. За два дні на базу привезли 5 вагонів вугілля. В перший день привезли 38 т вугілля, а в другий — 57 т. Скільки вагонів вугілля привозили кожного дня, якщо маса вагонів була однаковою?

— Уважно розгляньте короткий запис задачі 3 і задачі 2. Порівняйте їх. Чим вони схожі? Чим відрізняються? *(Схожі вони тим, що в них описується однакова ситуація: в обох задачах ідеться про кількість вагонів, загальну масу вугілля, причому вугілля привозили в однакових вагонах два дні. Відрізняються задачі тим, що те, що було відомо в першій задачі, невідомо в другій.)*

— Ці задачі також мають два випадки; три взаємопов'язані величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дані два числові значення, а для іншої — сумарне значення. Задача 3 має два запитання. Це задача того ж самого виду — на пропорційне ділення. За яким планом розв'язуються задачі на пропорційне ділення?

— Розкажіть план розв'язання даної задачі. (*Першою дією узнаємо сумарне значення загальної маси вугілля. Другою — масу 1 вагона. Третьою дією узнаємо кількість вагонів, що прибули на станцію в перший день, а четвертою — у другий.*)

Розв'язання.

- 1) $38 + 57 = 95$ (т) — всього привезли вугілля за два дні; друга сума.
- 2) $95 : 5 = 19$ (т) — маса 1 вагона; однакова величина.
- 3) $38 : 19 = 2$ шт. — кількість вагонів, що прибули в 1-й день.
- 4) $57 : 19 = 3$ шт. — кількість вагонів, що прибули в 2-й день.

Відповідь: в перший день на станцію привезли 2 вагони вугілля, в другий — 3 вагони.

Перевірка: $2 + 3 = 5$ (шт.) — всього вагонів. Задачу розв'язано правильно.

— Порівняйте розв'язання цих задач. Що в них спільного? Що відмінного? (*Спільні дві перші дії. Перша дія — додавання, а друга — ділення. Відрізняються двома останніми діями: в задачі 2 дві останні дії множення, а в задачі 3 — ділення.*)

— Але ми зазначили, що обидві задачі на пропорційне ділення. Для того щоб розрізнити ці задачі, ми домовилися вважати задачі, в яких дві останні дії — множення, задачами першого виду, а задачі, в яких дві останні дії — ділення, задачами другого виду.

— Як перетворити задачу на пропорційне ділення першого виду на задачу на пропорційне ділення другого виду? (*Щоб перетворити задачу одного виду на задачу іншого виду, треба:*

- 1) замінити шукані їх числовими значеннями і тому виключити їх сумарне значення;
- 2) обидва числові дані іншої величини вважати шуканими, але задати їх сумарне значення.)

— Порівняйте задачі на пропорційне ділення і задачі на знаходження четвертого пропорційного. Що в них спільного? (*У цих задачах розглядаються два випадки, є три взаємопов'язані величини, і одна*

величина однієї одиниці виміру або лічби є однаковою для обох випадків. (Стосовно однієї з величин дано два числові значення.)

— Чим вони відрізняються? (В задачах на знаходження четвертого пропорційного дано лише одне числове значення другої величини, а інші є шуканими; а в задачах на пропорційне ділення для другої величини дано лише сумарне значення, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення — два.)

Задачі на знаходження четвертого пропорційного				Задачі на пропорційне ділення			
І вид							
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>	I	} <input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>
II	?		<input type="checkbox"/>	II			?
	Загальна	Одиниця	Кількість (час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	?, однакова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	?
II	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?
II вид							
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	?
II	<input type="checkbox"/>		?	II	<input type="checkbox"/>		?
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	?	I	<input type="checkbox"/>	?, однакова	?
II	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?

Рис. 18. Види задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення. Однаковою є значення величини однієї одиниці вимірювання

Спільні істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного і задач на пропорційне ділення:

1. Три взаємопов'язані величини.
2. Два випадки.
3. Величина однієї одиниці виміру або лічби є однаковою для обох випадків.
4. Для однієї величини дано два числові значення

Відмінні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного і задач на пропорційне ділення:

Задачі на знаходження четвертого пропорційного	Задачі на пропорційне ділення
Для іншої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим	Для іншої величини обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму

— Порівняйте плани розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного і задач на пропорційне ділення. Що в них спільного? (Ключем до розв'язання задач обох видів є знаходження числового значення однакової величини.)

— Чим вони відрізняються? (Кількістю дій: задачі на знаходження четвертого пропорційного розв'язуються двома діями, а задачі на пропорційне ділення — чотирма. Вони відрізняються також способом знаходження однакової величини: в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома відомими числовими даними двох величин стосовно одного з випадків, в задачах на пропорційне ділення — за двома сумарними значеннями двох величин. Значення однакової величини в задачах на знаходження четвертого пропорційного знаходять у першій дії, а в задачах на пропорційне ділення — у другій, тому що першою дією слід знайти значення другої суми.)

2.2.2. Зміна величин задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими числами, що й у задачі 3 (с. 70), але про купівлю іграшок для дівчаток і хлопчиків.

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Д.	?	?, однакова	38 грн
Х.	?		57 грн

} 5 шт.

Задача. Купили всього 5 іграшок для дівчаток та хлопчиків за однаковою ціною. За іграшки для дівчат сплатили 38 грн, а за хлоп'ячі — 57 грн. Скільки купили іграшок для дівчаток, а скільки для хлопчиків?

— Чи є необхідність розв'язувати цю задачу? (*Розв'язок цієї задачі вже є на дошці. Треба виправити пояснення.*)

Розв'язання.

1) $38 + 57 = 95$ (грн) — всього заплатили за іграшки; *друга сума.*

2) $95 : 5 = 19$ (грн) — ціна іграшки; *однакова величина.*

3) $38 : 19 = 2$ шт. — стільки купили іграшок для дівчат.

4) $57 : 19 = 3$ шт. — стільки купили іграшок для хлопчиків.

Відповідь: для дівчаток купили 2 іграшки та 3 іграшки для хлопчиків.

— Порівняйте пояснення в першій і другій задачах. Що цікавого ви помітили? (*Першою дією ми узнали друге загальне значення (другу суму). Другою дією ми узнали однакову величину. Третьою дією ми відповіли на перше запитання задачі, а четвертою — на друге.*)

2.2.3. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

— Змінимо числові значення в цій задачі і ключові слова:

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Ч.	?	?, однакова	60 грн
С.	?		84 грн

Задача. Купили всього 12 червоних і синіх ручок за однаковою ціною, за червоні ручки сплатили 60 грн, а за сині — 84 грн. Скільки купили ручок кожного кольору?

— Порівняйте цю задачу з іншими задачами на пропорційне ділення. Що в них спільного? (*В них дуже схожі структури коротких записів — обидві таблиці містять взаємопов'язані величини, одна з величин є однаковою для обох випадків; до однієї з величин дані два значення (стосовно кожного випадку), а для іншої — лише сумарне значення (перша сума); значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. Ця задача містить два запитання. Це так само задача на пропорційне ділення.*)

Учні формулюють план розв'язування і розв'язують запропоновану задачу.

— Як ми розв'яжемо задачі на пропорційне ділення? За яким планом?

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	?, однакова	□	I	□	?, однакова	?
II	?		□		II		□

План розв'язання:

- 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин;
- 2) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці — за сумарними значеннями двох величин;
- 3) знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 19. Опорні схеми та план розв'язання задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки задачі на пропорційне ділення, в якій однаковою є величина однієї одиниці:

- 1) три взаємопов'язані величини;
- 2) два випадки;
- 3) значення величини однієї одиниці є однаковим для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини для кожного випадку;
- 5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

2.3. Задачі, в яких однаковою величиною є величина кількості або часу, а шуканими два значення загальної величини.

2.3.1. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

В задачі 2 (с. 62) змінюється однакова величина — однаковою величиною стає кількість. Діти складають задачу на знаходження загальної величини в обох випадках, порівнюють її з попередніми і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на пропорційне ділення, але в ній однакова величина — кількість.

— Припустімо, що вагони з вугіллям були великі й маленькі, але на базу привезли однакову кількість цих вагонів. Маса маленького вагона — 2 т, а великого — 3 т.

Вносимо зміни у короткий запис:

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
М.	?, однакова	2 т	} 95 т
В.		3 т	

Діти під керівництвом учителя складають задачу за коротким записом.

Задача 4. На базу привезли 95 т вугілля у великих і маленьких вагонах. Маса маленького вагона — 2 т, а великого — 3 т. Скільки тонн вугілля привезли в маленьких вагонах і скільки у великих, якщо кількість маленьких і великих вагонів однакова?

Робимо припущення щодо числових значень шуканих: загальна маса вугілля, яку привезли на базу в маленьких вагонах, буде меншою, тому що маса 1 маленького вагона менша за однакової їх кількості; загальна маса вугілля, яке привезли на базу у великих вагонах, буде більшою, тому що маса 1 великого вагона більша за їх однакової кількості. За однакової кількості вагонів загальна маса і маса 1 вагона змінюються в одному напрямку!

Аналізуючи математичну структуру задачі, учні переконуються, що у цій задачі: розглядаються два випадки; є три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова для обох випадків; дано два числові значення однієї величини, а стосовно іншої — сумарне значення, а кожне її значення є шуканим.

Далі вчитель пропонує порівняти цю задачу із задачею 2 і встановити, чим вони відрізняються. При визначенні відмінностей виділяється одна істотна — в задачі 2 (с. 62) сталою величиною була величина однієї одиниці — маса 1 вагона, а в задачі 4 — кількість вагонів з вугіллям.

Учні згадують узагальнений план розв’язання задач на знаходження четвертого пропорційного і розв’язують задачу. *(Першою дією ми знаходимо сумарну масу одного маленького і одного великого вагонів. Другою дією ми знаходимо значення однакової величини, тобто кількість вагонів. Третьою дією ми узнаємо масу вугілля, яке було привезено в маленьких вагонах. Четвертою — масу вугілля, яку було привезено у великих вагонах.)*

Розв’язуємо задачу та перевіряємо правильність зробленого припущення.

Розв’язання.

1) $2 + 3 = 5$ (т) — сумарна маса одного маленького і одного великого вагонів; *друга сума.*

2) $95 : 5 = 19$ шт. — кількість вагонів, *однакова величина.*

3) $19 \cdot 2 = 38$ (т) — привезли в маленьких вагонах.

4) $19 \cdot 3 = 57$ (т) — привезли у великих вагонах.

Перевірка: $38 + 57 = 95$ (т) — всього вугілля. Задачу розв’язано правильно.

Відповідь: у маленьких вагонах привезли 38 т вугілля, у великих — 57 т вугілля.

2.3.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими числами, що й в задачі 4 (с. 76), але про купівлю олівців та ручок.

Учитель вносить зміни у короткий запис задачі:

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
О.	?, однакова	2 грн	? } 95 грн
Р.		3 грн	

Задача. На 95 грн купили олівці та ручки. Ціна олівця — 2 грн, а ручки — 3 грн. Скільки заплатили окремо за олівці й за ручки, якщо кількість ручок і олівців однакова?

Розв'язання.

- 1) $2 + 3 = 5$ (грн) — сумарна ціна олівця і ручки; *друга сума.*
- 2) $95 : 5 = 19$ шт. — кількість олівців або ручок, *однакова величина.*
- 3) $19 \cdot 2 = 38$ (грн) — заплатили за олівці.
- 4) $19 \cdot 3 = 57$ (грн) — заплатили за ручки.

Відповідь: вартість олівців — 38 грн, а ручок — 57 грн.

— Чи є необхідність розв'язувати цю задачу? (*Розв'язання вже є на дошці. Треба поправити лише пояснення до арифметичних дій.*)

— Порівняйте пояснення в розв'язанні даної задачі і задачі 4 (с. 76—77). Що цікавого ви помітили? (*Першою дією ми знайшли друге сумарне значення (другу суму). Другою дією ми знайшли значення однакової величини. Третьою дією ми відповіли на перше запитання задачі, а четвертою — на друге.*)

2.3.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

Змінивши числові дані задачі й залишивши тими самими величини, досліджуємо вплив цієї зміни на план розв'язання задачі: від зміни числових даних план розв'язання задачі не змінюється.

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
О.	?, однакова	5	? } 144
Р.		7	

Задача. На 144 грн купили олівці та ручки. Ціна олівця — 5 грн, а ручки — 7 грн. Скільки заплатили окремо за олівці й за ручки, якщо їх кількість однакова?

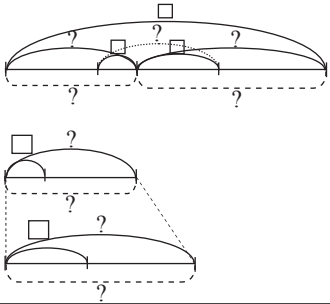
— Робимо припущення щодо числових значень шуканих: вартість олівців буде меншою, тому що їх ціна менша за однакової кількості. А вартість ручок буде більшою, тому що їх ціна більша за однакової кількості. За однакової кількості вартість і ціна змінюються в одному напрямку!

Учні формулюють план розв'язування і розв'язують запропоновану задачу.

— Порівняйте цю задачу із задачею 4 (с. 76). Що в них спільного? Який висновок можна зробити? (*Це також задача на пропорційне ділення.*)

Узагальнюємо математичну структуру і план розв'язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є кількість, а шуканими — значення загальної величини (рис. 20):

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	□	?, однакова
II	?	□	



План розв'язання:

- 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин — величини однієї одиниці;
- 2) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за сумарними значеннями двох величин;
- 3) знаходимо шукане значення загальної величини у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення загальної величини у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 20. Опорні схеми та план розв'язання задач на пропорційне ділення, в яких шуканими є значення загальної величини і однаковою є величина кількості або часу

2.4. Задачі, в яких однаковою величиною є величина кількості або часу, а шуканими — два значення величини однієї одиниці виміру або лічби.

2.4.1. Знаходження сумарного значення величини однієї одиниці виміру або лічби, включення його в задачу і вимога знайти значення величини однієї одиниці виміру або лічби для кожного з двох випадків.

Перетворюємо задачу 4 (с. 76) на задачу іншого виду.

Знайдені числові значення загальної маси маленьких і великих вагонів записуємо у короткому записі й тому прибираємо значення суми. Вчитель звертається до дітей з проханням поміркувати, які зміни треба

внести у короткий запис, щоб отримати задачу на пропорційне ділення іншого виду. Учні доходять висновку, що треба числові значення маси одного маленького і одного великого вагонів замінити знаками питання, але при цьому вказати числове значення їх суми.

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
М.	?, однакова	?	38 т
В.		?	

Задача 5. На базу привезли однакову кількість великих і маленьких вагонів з вугіллям. У маленьких вагонах привезли 38 т вугілля, а у великих 57 т. Скільки тонн вугілля вміщується в одному маленькому та в одному великому вагонах, якщо разом в них 5 т?

Робимо припущення щодо числових значень шуканих: маса 1 маленького вагона буде меншою, тому що за однакової кількості ними перевезли меншу загальну масу вугілля; маса 1 великого вагона буде більшою, тому що за однакової кількості ними перевезли більшу загальну масу вугілля. Отже, за однакової кількості загальна маса і маса 1 вагона змінюються в одному напрямку!

Аналізуючи математичну структуру задачі, учні впевнюються, що це так само задача на пропорційне ділення.

Учні згадують узагальнений план розв'язання задач на пропорційне ділення і застосовують його для розв'язування задачі. (*Першою дією ми знаходимо сумарну загальну масу вугілля. Другою — значення однакової величини, тобто кількість вагонів. Третьою дією ми знаємо масу вугілля, яке вміщується в 1 маленькому вагоні. Четвертою дією ми знаходимо масу вугілля, яке вміщується в 1 великому вагоні.*)

Розв'язуємо задачу та перевіряємо правильність зробленого припущення.

Розв'язання.

- 1) $38 + 57 = 95$ (т) — сумарна загальна маса вугілля; друга сума.
- 2) $95 : 5 = 19$ шт. — кількість вагонів, однакова величина.
- 3) $38 : 19 = 2$ (т) — вміщується в 1 маленькому вагоні.
- 4) $57 : 19 = 3$ (т) — вміщується в 1 великому вагоні.

Перевірка: $2 + 3 = 5$ (т) — в маленькому та великому вагонах. Задачу розв'язано правильно.

Відповідь: в одному маленькому вагоні вміщується 2 т вугілля, в одному великому вагоні — 3 т.

— Порівняйте розв’язання задачі 5 і задачі 3. *(Вони мають зовсім однакові дії, але пояснення до цих дій різні!)*

2.4.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими числами, що й в задачі 5 (с. 80), але про купівлю закладок для дівчаток і хлопчиків.

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Д.	?, однакова	?	38 грн
Х.		?	
		} 5 т	

Задача. Купили однакову кількість закладок для дівчаток і хлопчиків за однаковою ціною. За закладки для дівчат заплатили 38 грн, а за закладки для хлопців — 57 грн. Яка ціна одієї закладки для дівчинки і для хлопчика окремо, якщо разом за закладку для хлопчика і закладку для дівчинки треба заплатити 5 грн?

— Порівняйте пояснення в цих задачах. Що в них спільного?

2.4.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв’язання задачі.

— Змінимо в попередній задачі числові значення.

	Кількість (шт.)	Ціна (грн)	Вартість (грн)
Д.	?, однакова	?	6 грн
Х.		?	
		} 12 грн	

Задача. Купили однакову кількість листівок для дівчаток і хлопчиків. За листівки для дівчат заплатили 60 грн, а за листівки для хлопців — 84 грн. Яка ціна однієї листівки для хлопчика і листівки для дівчинки окремо, якщо разом вони коштують 12 грн?

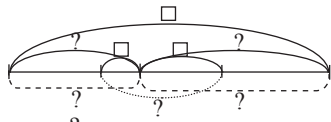
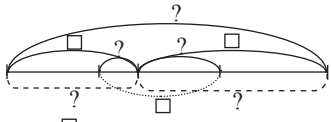
Робимо припущення щодо числових значень шуканих.


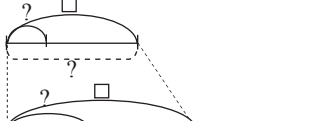
— Порівняйте цю задачу з попередніми. Що в них спільного?

Учні формулюють план розв'язання і розв'язують запропоновану задачу.

— Порівняйте задачу другого виду із задачею першого виду (див. рис. 21). Що в них спільного? Що спільного у їх розв'язаннях?

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	□	?, однакова	I	□	?	?, однакова
II	?	□		II	□	?	

План розв'язання:

- 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин;
- 2) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за сумарними значеннями двох величин;
- 3) знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 21. Опорні схеми та план розв'язання задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина кількості або часу

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці:

- 1) наявні три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядаються два випадки;
- 3) значення величини кількості або часу є однаковим для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини для кожного випадку;
- 5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

Задачі, в яких однаковою є величина однієї виміру або лічби				Задачі, в яких однаковою є величина кількості або часу			
I вид				I вид			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	?, однакова	□	I	?	□	?, однакова
II	?			□			
II вид				II вид			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, однакова	? } □	I	□	?	?, однакова
II	□			? } □	?		
<p>План розв'язання:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин; 2) знаходимо значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин; 3) знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі. 							

Рис. 22. Опорні схеми та план розв'язання задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

— Порівняйте розв’язання задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці та однаковою величиною є значення кількості (або часу). Узагальніть план розв’язання задач на пропорційне ділення (рис. 22 на с.83).

2.4.4. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина. Дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задач.

Змінивши у задачі 2 (с. 62) однакову величину — величину однієї одиниці — на загальну величину, отримусмо задачу, яку розв’язати способом знаходження однакової величини не можна.

— Припустімо, що у великих і маленьких вагонах привезли однакову масу вугілля. Маса маленького вагона — 2 т, а великого — 3 т.

Вносимо зміни у короткий запис:

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона (т)	Загальна маса вугілля (т)
М.	?	2 т	?, однакова
В.	?	3 т	

Якщо великими і маленькими вагонами привезли однакову масу вугілля, а маса 1 маленького вагона менше, ніж маса 1 великого вагона, то їх повинно бути більше, ніж великих вагонів. Тому не можна в цій задачі знаходити однакову величину — загальну масу — за двома сумами: сумою вантажностей і сумою кількостей!

Цю задачу розв’язати арифметичним методом неможливо.

— Таким чином, експериментуючи із задачею, ми сконструювали таку задачу на пропорційне ділення, яку арифметичним методом розв’язати не можна. Вона розв’язується за допомогою дрібно-раціонального рівняння, і це можна бути здійснити лише в курсі алгебри 7-го класу.

Тому подальше експериментування з такою структурою задачі ми проводити не будемо, оскільки не маємо знань для її розв’язання.

— Отже, ми дослідили задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою була величина однієї одиниці чи кількість або час.

Ми переконалися, що зміна однакової величини не впливає на план розв’язання задачі. Крім того, ми склали задачу на пропорційне

ділення, в якій однаковою є загальна величина, але ми не маємо знань для її розв'язання. Тимчасом, як у задачах на знаходження четвертого пропорційного, так і в задачах на пропорційне ділення однаковою може бути величина однієї одиниці, або кількість чи час, або загальна величина.

Тому узагальнимо математичну структуру задач на пропорційне ділення, зіставивши її з математичною структурою задач на знаходження четвертого пропорційного, і сформулюємо істотні ознаки таких задач та узагальнений план розв'язання (рис. 23).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення:

- 1) наявні три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядаються два випадки;
- 3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) для однієї з величин дано два числові значення для обох випадків;
- 5) для іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим або обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного				Задачі на пропорційне ділення			
I	a	?, однакова	b	I	a	?, однакова	$\left. \begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} \right\} k$
II	c	?	?	II	c	?	$\left. \begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} \right\} k$
План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):				План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):			
<ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо значення однакової величини за двома числовими значеннями одного з випадків; 2) знаходимо шукане значення, відповідаємо на запитання задачі 				<ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин; 2) знаходимо значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин; 3) знаходимо шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі 			

Рис. 23. Узагальнені опорні схеми та плани розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення

Також можна *узагальнити способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення способом знаходження однакової величини:*

- 1) знайти однакову величину за двома числовими значеннями стосовно одного з випадків (за двома сумарними значеннями);
- 2) відповісти на запитання задачі.

3. Формування вміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення.

Учні аналізують математичну структуру задачі, «впізнають» її, згадують узагальнений план розв'язання і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити перетворенню задачі одного виду на задачу іншого виду, перетворенню задачі на пропорційне ділення на задачу на знаходження четвертого пропорційного. Можна пропонувати учням задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою величиною є кількість або час.

Отже в запропонованій методиці реалізовано наступні аспекти:

1. Для усвідомлення учнями зв'язку задач на пропорційне ділення і задач на знаходження четвертого пропорційного ми перетворили задачу на знаходження четвертого пропорційного (однакова величина — величина однієї одиниці вимірювання) на задачу на пропорційне ділення, причому спочатку отримали задачу першого виду, а потім другого.

2. Ми здійснили порівняння задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення, визначили спільні та відмінні істотні ознаки.

3. Дослідження задачі на пропорційне ділення здійснювалося шляхом зміни однакової величини і з'ясування її впливу на план розв'язання задач на пропорційне ділення.

4. Дослідження задачі на пропорційне ділення здійснювалося на основі перетворення задачі одного виду на задачу іншого виду.

5. Працюючи над кожною задачею на пропорційне ділення, ми досліджували вплив зміни величин задачі на її розв'язання.

6. Після цього ми досліджували вплив зміни числових значень задачі на план її розв'язання.

Такий усебічний аналіз привів до узагальнення *істотних ознак задач на пропорційне ділення*:

- 1) ці задачі розглядають два випадки;
- 2) вони містять три взаємопов'язані величини;
- 3) одна з величин є однаковою для двох випадків;
- 4) для однієї величини дано два числові значення;
- 5) для іншої величини дано значення суми, а значення цієї величини для кожного випадку є шуканими.

Дослідження задач на пропорційне ділення дало нам можливість узагальнити план розв'язання задач цього виду арифметичним методом — способом знаходження однакової величини.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВІДОМИХ ЗА ДВОМА РІЗНИЦЯМИ

4 КЛАС

1. Підготовча робота до ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями.

Мета підготовчої роботи полягає в актуалізації знань, умінь та навичок, а саме:

- знання взаємозв'язку між основними групами величин, які перебувають у пропорційній залежності;
- уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини (зведення до одиниці) та задачі на пропорційне ділення:
 - аналізуючи умову задачі, визначати однакову величину;
 - складати короткий запис задачі у вигляді таблиці;
 - під час пошуку способу розв'язання задачі усвідомлювати, що для відповіді на запитання задачі треба знати значення однакової величини, яке можна знайти або за даними числовими значеннями двох величин для іншого випадку, або за двома сумарними значеннями двох інших величин для обох випадків.

Всі перелічені знання та уміння можна актуалізувати під час розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини й перетворення їх на задачі на пропорційне ділення з наступним порівнянням математичної структури задачі та планів розв'язання.

Задача. Човняр за 3 рейси перевіз через річку 24 особи. Скільки людей він перевезе за 5 рейсів, якщо кожного разу він бере на борт однакову кількість людей?

Учні виконують короткий запис задачі у формі таблиці, пояснюють числові дані, значення однакової величини та шукане; з'ясовують, що це задача на знаходження четвертого пропорційного і згадують узагальнений план її розв'язання. Записуємо розв'язання задачі:

Розв'язання.

1) $24 : 3 = 8$ (ос.) — човняр перевозить за 1 рейс; *однакова величина.*

2) $8 \cdot 5 = 40$ (ос.) — човняр перевозить за 5 рейсів.

Або: $24 : 3 \cdot 5 = 40$ (ос.).

Відповідь: човняр перевезе за 5 рейсів 40 осіб.

Учитель пропонує, використовуючи знайдене числове значення, перетворити цю задачу на задачу на пропорційне ділення. Для цього згадуються відмінні ознаки цього виду задач від задач на знаходження четвертого пропорційного. Встановлюємо, що в цій задачі має бути два шуканих: загальна кількість людей має бути невідомою в обох випадках, але треба задати її сумарне значення — 64 особи. Вносимо зміни у короткий запис задачі, й школярі формулюють одержану задачу.

Задача. Човняр загалом перевіз через річку 64 особи. Скільки осіб він перевіз за 3 рейси за та 5 рейсів окремо, якщо кожного разу він бере на борт однакову кількість людей?

Згадуємо узагальнений план розв'язання задач на пропорційне ділення, і частина учнів класу, які здатні скласти план розв'язання цієї задачі, працюють самостійно, а решта, якщо такі є, — фронтально з учителем виконують аналітичний пошук способу розв'язання, а потім самостійно записують розв'язання. Перевіряємо розв'язання задачі:

Розв'язання.

1) $3 + 5 = 8$ (р.) — всього рейсів; *друга сума.*

2) $64 : 8 = 8$ (ос.) — човняр перевозить за 1 рейс; *однакова величина.*

3) $8 \cdot 3 = 24$ (ос.) — човняр перевозить за 3 рейси.

4) $8 \cdot 5 = 40$ (ос.) — човняр перевозить за 5 рейсів.

Або:

1) $64 : (3 + 5) \cdot 3 = 24$ (ос.),

2) $64 : (3 + 5) \cdot 5 = 40$ (ос.).

Перевірка: $24 + 40 = 64$ (ос.) — загалом. Задачу розв'язано правильно.

Відповідь: човняр перевіз за 3 рейси 24 особи, а за 5 рейсів — 40.

Таким чином, якщо в задачі є однакова для обох випадків величина, то для відповіді на запитання задачі треба знати значення однакової величини.

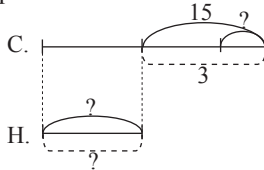
Однакову величину знаходять по-різному:

- за відомими значеннями двох величин для іншого випадку;
- за сумарними значеннями двох інших величин для обох випадків разом.

Одним із завдань підготовчої роботи є вироблення в молодших школярів *уміння знаходити однакову величину за двома різними відношеннями двох інших величин (двома різницями)*. Це можна здійснити шляхом розв'язання системи задач:

Задача. Сашко купив на 3 листівки більше, ніж Наталка, і заплатив на 15 грн більше. Знайти ціну листівки.

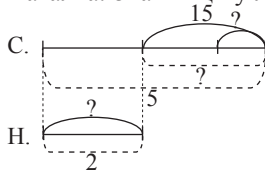
Записуємо задачу коротко у вигляді таблиці й виконуємо схематичний малюнок. Верхній відрізок означає, з одного боку, скільки листівок купив Сашко, а з іншого — скільки грошей він за них заплатив. Нижній відрізок означає, з одного боку, скільки листівок купила Наталка, а з іншого — скільки грошей вона заплатила.



Щоб показати на схемі, що Сашко купив на 3 листівки більше, позначимо на верхньому відрізку відрізок, який позначає стільки ж листівок, скільки придбала Наталка, а інша частина верхнього відрізка позначатиме різницю кількості — 3 штуки — й різницю вартості — 15 грн.

Міркуємо так: щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість. Нам відома лише різниця вартості листівок (15 грн) та різниця їх кількості (3 шт.). Дією ділення відповімо на запитання задачі: $15 : 3 = 5$ (грн) — ціна листівки.

Задача. Сашко купив 5 листівок, а Наталка — 2. Сашко заплатив на 15 грн більше, ніж Наталка. Знайти ціну листівки.



Сюжетні задачі, що містять сталу величину

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
С.	?, на 15 грн більша	?, однакова	5 шт.
Н.	?		2 шт.

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що змінилося?

— Як ця зміна вплине на розв'язання?

— Для того щоб відповісти на запитання задачі, потрібно виконати ще одну арифметичну дію і дізнатися, на скільки більше листівок купив Сашко, ніж Наталка. Таким чином, у цій задачі однакову величину — ціну — ми шукатимемо за двома різними відношеннями вартості та кількості — за двома різницями.

Наступним кроком відпрацюємо в учнів уміння знаходити однакову величину за двома різницями на задачах такого типу:

Задача. В перший день купили 5 коробок кольорових олівців, а другого дня — 7 таких самих коробок кольорових олівців і заплатили на 4 грн більше. Скільки коштує одна коробка кольорових олівців?

Задача. У перший магазин завезли 5 однакових сувої тканини, а в другий — 3 таких сувої. У перший магазин завезли на 180 м тканини більше, ніж у другий. Скільки метрів тканини в одному сувої?

Розглянемо докладно методику роботи над цією задачею.

— Про що говориться в задачі? (*В задачі говориться про сувої тканини, які завезли в два магазини.*)

— Які сувої тканини завезли в магазини? (*Однакові.*)

— Що це означає? (*Вислів «однакові сувої» означає, що в них однакова тканина і в одному сувої однакова кількість метрів цієї тканини.*)

— Про які величини йдеться в задачі? (*Кількість сувоїв, довжина тканини в одному сувої, загальна довжина тканини.*)

— Які ще ключові слова можна виділити? (*I магазин, II магазин.*)

— Запишемо задачу коротко у вигляді таблиці.

	Кількість сувоїв (шт.)	Довжина тканини в 1 сувої	Загальна довжина тканини (м)
I	5 шт.	?, однакова	?, на 180 м більша
II	3 шт.		?

Учні за коротким записом пояснюють числові значення задачі, пояснюють, що означає однакова величина, називають запитання задачі та з'ясовують, як пов'язана однакова величина — довжина тканини в одному сувої — з іншими величинами. Далі робота здійснюється таким чином:

— Як пов'язані між собою дві величини — загальна довжина тканини і кількість сувоїв — за однакової довжини тканини в одному сувої? *(За однакової довжини тканини в кожному сувої загальна довжина тканини буде більшою, якщо більша кількість сувоїв тканини.)*

— В який магазин привезли більше метрів тканини? *(У перший.) Чому? (Тому що в перший магазин привезли більше сувоїв тканини, ніж у другий.)*

— На скільки більше метрів тканини привезли в перший магазин, ніж у другий? *(На 180 м.)*

— Що це означає? *(Це означає, що в перший магазин привезли тканини стільки, скільки і в другий, та ще 180 м.)*

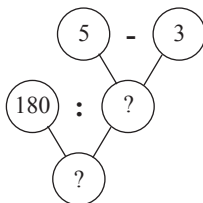
— Скільки сувоїв у першому магазині вміщують стільки метрів тканини, скільки метрів тканини привезли в другий магазин? *(3 сувої.)*

— Але ж у перший магазин привезли більше, ніж 3 сувої тканини. Скільки метрів тканини вміщує решта сувоїв у першому магазині? *(180 м.)* Це перша різниця.

— Чи можна дізнатися, скільки сувоїв тканини вміщують 180 м? Це і є друга різниця.

— Знаючи, що в перший магазин привезли 5 сувоїв тканини, а в другий 3 таких сувої, про що можна дізнатися за цими числовими даними? *(Можна дізнатися, на скільки сувоїв тканини більше привезли в перший магазин, ніж у другий; або можна дізнатися про різницю в кількості сувоїв тканини у першому і другому магазинах.)*

— Якою арифметичною дією дізнаємося про це? *(Дією віднімання.)*



— Знаючи, на скільки метрів тканини більше привезли в перший магазин, ніж у другий (на 180 м) і на скільки більше привезли сувоїв тканини, про що ми можемо дізнатися? Або можна сказати так: знаючи різницю загальної довжини тканини і різницю кількості сувоїв тканини, привезеної у магазини, що можна узнати цими числовими даними? (*Можна узнати довжину тканини в одному сувої, однакову величину.*)

— Якою арифметичною дією дізнаємося про це? (*Дією ділення.*)

Далі діти складають план розв'язання задачі, записують розв'язування і відповідь.

У ході розв'язування аналогічних задач у дітей повинно скластися таке уявлення: якщо в задачі не дано обох різниць, одну з них слід визначити і лише потім знайти значення однакової величини. Уміння визначати другу різницю, а потім за двома різницями знаходити однакою величину є складовою вміння розв'язувати задачі на знаходження невідомого за двома різницями. Тому воно має бути засвоєне як самостійна дія шляхом виконання певної кількості вправ і узагальнення способу розв'язання.

Таким чином, *однакову величину знаходять по-різному:*

- за відомими значеннями двох величин для іншого випадку;
- за значеннями двох сум інших величин для обох випадків разом (за двома сумами);
- за значеннями різниць двох інших величин для двох випадків (за двома різницями).

2. Ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями.

Слід зазначити, що існують кілька варіантів методики ознайомлення молодших школярів із задачами на знаходження невідомих за двома різницями:

Варіант 1. Розв'язується задача на знаходження однакової величини за двома різницею відношеннями інших величин (наприклад попередня). Через зміну запитання задачі, яке тепер містить слово «кожний» і передбачає знаходження значення загальної величини у двох випадках, вводиться задача нового виду. Учні з'ясовують, що змінилося в задачі і як ця зміна вплине на розв'язання.

Варіант 2. Розв'язується задача на знаходження четвертого пропорційного із наступним записом числового значення шуканого числа в таблицю, що є коротким записом, знаходженням різницевого відношення шуканого числа і даного. В результаті зміни запитання, яке містить слово «кожний», шуканими стають числові значення загальної величини в обох випадках (але задається їх різницеве відношення), задача на знаходження четвертого пропорційного перетворюється на задачу на знаходження невідомих за двома різницями.

Варіант 3. Розв'язується задача на пропорційне ділення. Наступним кроком є перетворення її на задачу на знаходження невідомих за двома різницями. Саме останній варіант методики ми реалізуємо.

2.1. Задачі, в яких однаковою є величина однієї одиниці, а шуканими — два значення загальної величини.

2.1.1. Знаходження різницевого відношення загальної величини, включення його в задачу і вимога знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків.

Спочатку учні розв'язують задачу 1 на пропорційне ділення (однаковою величиною є величина однієї одиниці; у задачі потрібно знайти загальну величину для кожного з випадків),

Задача 1. У кіоску продали за однаковою ціною 12 синіх стержнів для ручок та 8 чорних. За всі стержні отримали 16 грн. Скільки грошей одержали за кожний вид стержнів?

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
С.	?	?, однакова	12 шт.
Ч.	?		8 шт.

Розв'язання.

- $12 + 8 = 20$ (шт.) — всього продано стержнів; *друга сума.*
- $1600 : 20 = 80$ (коп.) — ціна; *однакова величина.*
- $80 \cdot 12 = 960$ (коп.) — вартість синіх стержнів.
- $80 \cdot 8 = 640$ (коп.) — вартість чорних стержнів.

Відповідь: вартість синіх стержнів 9 грн 60 коп., а вартість чорних — 6 грн 40 коп.

Перед розв'язуванням задачі 1 школярі робили припущення щодо очікуваних результатів, а після її розв'язання вчитель пропонує

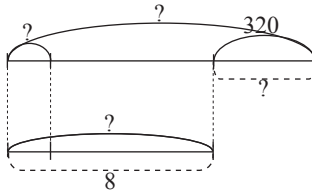
дізнатися, наскільки більше чи менше одне значення шуканої — загальної величини за інше, тобто величину їх різницевого відношення. Знайдене число включається у наступну задачу. Отже, сума загальних величин замінюється їх різницею. Таким чином отримуємо задачу на знаходження невідомих за двома різницями.

— За які стержні заплатили більше грошей? На скільки?

— Змінимо короткий запис так, щоб за умовою задачі нам було відомо, що за сині стержні заплатили на 3 грн 20 коп. більше, ніж за чорні, а запитання залишилося таким самим, як у попередній задачі.

Це числове значення заноситься у короткий запис:

	Вартість	Ціна	Кількість (шт.)
С.	?, на 3 грн 20 коп. більша	?, однакова	12 шт.
Ч.	?		8 шт.



Учні складають задачу за коротким записом.

Задача 2. У кіоску продали за однаковою ціною 12 синіх стержнів для ручок та 8 чорних. За сині стержні заплатили на 3 грн 20 коп. більше, ніж за чорні. Скільки грошей одержали за кожний вид стержнів?

Учитель повідомляє, що задача, яку складено, — це задача нового виду, на знаходження невідомих за двома різницями.

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Чим вони схожі? Чим відрізняються? (Ці задачі схожі тим, що обидві містять три взаємопов'язані величини: вартість, ціну, кількість; дані два числові значення кількості, а обидва значення вартості є шуканими; величина ціни є однаковою для обох випадків. Відрізняються ці задачі тим, що в задачі на пропорційне ділення було дано значення суми вартостей синіх і чорних стержнів, а в цій — значення різниці.)

— Таким чином, в обох цих задачах є однакова величина — ціна. Якщо в задачі є однакова величина, то її знаходження є ключем до розв'язання задачі.

— Чи можна в цій задачі знайти однакову величину — ціну — за відомими для іншого випадку значеннями вартості й кількості? *(Ні, тому що ні для синіх, ані для чорних стержнів не дано значень обох величин — вартості й кількості.)*

— Чи можна знайти ціну за загальними значеннями вартості й кількості? *(Ні, загальне значення кількості можна знайти, оскільки дані обидва числові значення кількості — для синіх і чорних стержнів, а загальне значення вартості не дано в задачі, і ми не зможемо його знайти.)*

— Як ще можна знайти однакову величину? *(Однакову величину можна знайти за двома різницями числових значень вартості й кількості.)*

Може статися, що певна частина учнів зможе самостійно з'ясувати, як зміна умов вплинула на розв'язання, тоді їм слід запропонувати розв'язати задачу самостійно. Для решти учнів учитель проводить фронтальну бесіду, організовуючи аналітичний пошук способу розв'язання задачі.

— Що потрібно знати, щоб відповісти на перше запитання задачі: скільки грошей отримали за сині стержні? *(Потрібно знати два числові значення: I — ціну синіх стержнів (невідома), та II — кількість синіх стержнів (відома — 12).)*

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? *(Дією множення.)*

— Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? *(Ні, ми не знаємо ціну. Ціна — це однакова величина, її можна знайти за двома різницями.)*

— Що треба знати, аби знайти ціну? *(Треба знати два числові значення: I — різницю вартостей, або на скільки більше коштують сині стержні, ніж чорні (відомо — 320), та II — різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних (невідомо).)*

— Якою арифметичною дією узнаємо ціну? *(Дією ділення: щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість.)*

— Чи можна відразу відповісти на це запитання? *(Ні, ми не знаємо різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних.)*

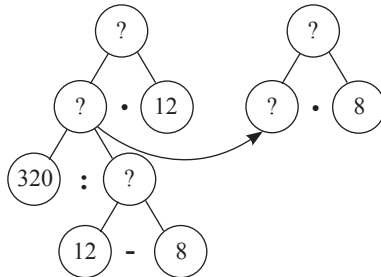
— Що треба знати, аби про це дізнатися? *(Треба знати два числові значення: I — кількість синіх стержнів (відома — 12), та II — кількість чорних стержнів (відома — 8).)*

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? *(Дією віднімання.)*

— Чи можна тепер відповісти на перше запитання задачі? (Так, ми від запитання перейшли до числових даних.)

— Що треба знати, аби відповісти на друге запитання? (Треба знати два числові значення: I — ціну (поки ще невідома, але ми узнаємо її, відповідаючи на перше запитання задачі), та II — кількість чорних стержнів (відома — 8).)

— Якою арифметичною дією відповімо на це запитання задачі? (Дією множення.)



— Складіть план розв'язання задачі. (Першою дією знайдемо різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних, — другу різницю. Другою дією ми узнаємо ціну стержня — однакову величину. Третьою дією ми відповімо на перше запитання задачі й узнаємо вартість синіх стержнів. Четвертою дією ми відповімо на друге запитання задачі — знайдемо вартість чорних стержнів.)

Розв'язання.

1) $12 - 8 = 4$ (шт.) — на стільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних; або різниця між кількостями синіх і чорних стержнів; друга різниця.

2) $320 : 4 = 80$ (коп.) — ціна стержня; однакова величина.

3) $80 \cdot 12 = 960$ (коп.) — вартість синіх стержнів.

4) $80 \cdot 8 = 640$ (коп.) — вартість чорних стержнів.

— На друге запитання задачі можна відповісти інакше: знаючи вартість синіх стержнів (960 коп.) та те, на скільки це більше, ніж вартість чорних стержнів (на 320 коп.), можна знайти вартість чорних стержнів дією віднімання.

— Запишіть відповідь до задачі. (Відповідь: за сині стержні отримали 9 грн 60 коп. та 6 грн 40 коп. за чорні.)

— Виконаємо перевірку: знайдіть різницю знайдених чисел шуканих і порівняйте її із числовим значенням даної в задачі різниці вартостей.

— Порівняємо цю задачу із задачею на пропорційне ділення. Задачу на знаходження невідомих за двома різницями ми отримали засобом перетворення *задачі на пропорційне ділення*, яка має наступні **істотні ознаки**:

- 1) задача містить три взаємопов'язані величини;
- 2) у ній розглядаються два випадки;
- 3) величина однієї одиниці виміру або лічби з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числові значення величини кількості або часу;
- 5) обидва значення загальної величини є шуканими, але дано їх суму.

У задачі на пропорційне ділення ми замінили суму значень загальної величини на їх різницю і отримали задачу на знаходження невідомих за двома різницями..

Істотні ознаки задачі на знаходження невідомих за двома різницями:

- 1) ці задачі містять три взаємопов'язані величини;
- 2) у них розглядаються два випадки;
- 3) величина однієї одиниці виміру або лічби з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числові значення величини кількості або часу для обох випадків;
- 5) для загальної величини два числові значення є шуканими, але дано їх різницею відношення.

— За яким *планом* ми розв'язували *задачу на пропорційне ділення*?

1. Знаходили суму значень кількості або часу; другу суму.
2. Знаходили значення однакової величини — величини однієї одиниці — за двома сумами; *однакову величину*.
3. Відповідали на перше запитання задачі, знаходили значення загальної величини у першому випадку.
4. Відповідали на друге запитання задачі, знаходили значення загальної величини у другому випадку.

— Як зміна умов вплинула на план розв'язання задачі? Розв'язуючи задачі на знаходження невідомих за двома різницями, ми не можемо однаковою величину знаходити за двома сумами, тому що в умові не дано суму, але дано різницю, тому однаковою величину ми знаходимо за двома різницями. Таким чином, зміна умов задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини.

Задачу на знаходження невідомих за двома різницями ми розв'язували за таким планом:

1. Знаходили різницю даних числових значень іншої величини — кількості або часу; *другу різницю*.
2. Знаходили однаковою величину (величину однієї одиниці) за двома різницями.
3. Відповідали на перше запитання задачі.
4. Відповідали на друге запитання задачі.

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

— Порівняйте розв'язання цієї і попередньої задачі. Що цікавого можна помітити? (В обох розв'язаннях дві останні дії однакові.)

— Як ви вважаєте, чому так сталося? (Тому що в обох задачах ті самі запитання і є однаковою величиною, яка потрібна для відповіді на обидва запитання задачі.)

— А чим відрізняються розв'язання? Чому? (Розв'язання відрізняються першими двома діями, тому що однаковою величиною ми знаходили по-різному: в першій задачі — за сумарними значеннями вартості й кількості, а в другій — за їх різницею відношеннями.)

— Узагальнюємо математичні структури задач на знаходження невідомих за двома різницями і задач на пропорційне ділення:

Задачі на пропорційне ділення				Задачі на знаходження невідомих за двома різницями			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	? } □	?, однакова	□	I	?	?, однакова	□
II	? } □		□	II	?, на □ б. (м.)		□
<p>План розв'язання:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин — кількості або часу; 2) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці — за сумарними значеннями двох величин; 3) знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі 				<p>План розв'язання:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин — кількості або часу; 2) знаходимо значення однакової величини — величини однієї одиниці — за двома різницями; 3) знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі 			

Рис. 24. Опорні схеми та плани розв'язання задач на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями, в яких шуканим є значення загальної величини (однаковою є величина однієї одиниці)

2.1.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими числами, що й у задачі 2 (с. 95), але з величинами «відстань», «швидкість» і «час».

	Час (год)	Швидкість	Відстань (км)
I т.	12 год	?, однакова	?, на 320 км більша
II т.	8 год		?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

— Чи треба розв'язувати цю задачу? (Ні, розв'язання її вже записано. Треба виправити пояснення до арифметичних дій.)

— Що ми знайшли першою дією? (Значення різниці часу — значення другої різниці.)

— Що ми знайшли другою дією? (Значення швидкості — значення однакової величини.)

— Що ми узнали третьою дією? (Ми узнали, яку відстань подолав перший турист, — відповіли на перше запитання задачі.)

— Що ми узнали четвертою дією? (Ми узнали, яку відстань подолав другий турист, — відповіли на друге запитання задачі.)

— Як перевірити правильність розв'язання цієї задачі? (Треба від відстані, яку подолав перший турист, відняти відстань, яку подолав другий турист, тобто знайти різницю відстаней; і якщо вона дорівнюватиме даному в умові задачі числу 32, то задачу розв'язано правильно.)

2.1.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

— З тими самими величинами, але з іншими числами складіть задачу за таблицею:

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
Л.	?, на 140 км більша	?, однакова	5 год
В.	?		3 год

— Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі?

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Чим вони відрізняються? Що в них спільного? (В них спільні величини та структура короткого запису.)

— Якщо в задачах спільна структура короткого запису, то це задачі одного виду. За яким планом ми розв'язуємо задачі на знаходження невідомих за двома різницями?

— Що ми знаємо першою дією? (Значення другої різниці.)

— Що ми знаходимо другою дією? (Значення однакової величини.)

— Що ми знаємо третьою дією? (Ми відповідаємо на перше запитання задачі.)

— Про що ми дізнаємося четвертою дією? (Ми відповідаємо на друге запитання задачі.)

— Розкажіть план розв'язання цієї задачі. Запишіть розв'язання та відповідь.

— Порівняйте цю задачу з попередніми. Чим вони відрізняються? (Вони відрізняються групами величин та числовими даними.) Що в них спільного? (Кожна задача містить по два випадки (сині та чорні стержні, I та II туристи, легкова і вантажна машини), три взаємопов'язані величини (вартість, ціна і кількість; відстань, швидкість і час), одна з яких є однаковою для обох випадків (ціна; швидкість); для кожного випадку дано числові значення однієї з величин (кількості або часу), а числові значення іншої (вартості або відстані) для кожного випадку є шуканими, але дано їх різницю.)

— У чому ключ до розв'язання таких задач? (Ці задачі містять однакою величину, тому ключем до їх розв'язання є знаходження однакової величини.)

— Як ми знаходили однакою величину? (Ми знаходили однакою величину за двома різницями числових значень величин.)

— Проаналізуйте математичну структуру цих задач (короткий запис). Скільки вони містять взаємопов'язаних величин? Що можна сказати про одну з них? Скільки випадків у них розглядається? Які числові значення дані? Що є шуканим?

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями:

	Загальна	Одиниця	Кількість (час)
I	?, \square на більше (менше)	?, однакова	\square
II	?		\square

Такі задачі розглядають два випадки та містять три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова для обох випадків; дано два значення для однієї з величин та різниця між значеннями іншої величини, причому саме обидва значення цієї величини є шуканими.

— За яким планом ми розв'язували задачі на знаходження невідомих за двома різницями?

План розв'язання задач на знаходження невідомих за двома різницями:

- 1) знаходимо значення другої різниці — різниці кількостей або часу;
- 2) знаходимо значення однакової величини — величини одиниці виміру;
- 3) відповідаємо на перше запитання задачі — знаходимо загальну величину для першого випадку;
- 4) відповідаємо на друге запитання задачі — знаходимо загальну величину для другого випадку.

2.1.4. Зміна характеру трактування даної різниці й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

З метою узагальнення математичної структури задачі та способу її розв'язання учням пропонується пояснити, що означає значення даної різниці, двома способами. Далі досліджуємо, як зміниться розв'язання задачі, якщо характер трактування даної різниці «на ... більше» зміниться і стане «на ... менше» або навпаки. Учні роблять висновок, що від цієї зміни алгоритм розв'язання не зміниться, треба тільки дещо змінити пояснення до першої дії.

— Що означає в попередній задачі число 140? (*Число 140 означає, з одного боку, на скільки більше проїхала легкова машина, ніж вантажна. Якщо легкова проїхала на 140 км більше, ніж вантажна, то вантажна проїхала на 140 км менше, ніж легкова; таким чином, число 140, з іншого боку, означає, на скільки менше проїхала вантажна машина, ніж легкова.*)

— Розкажіть задачу, в якій число 140 позначатиме, на скільки кілометрів менше проїхала вантажна машина, ніж легкова.

— Внесемо зміни у короткий запис:

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год.)
Л.	?	?, однакова	5 год
В.	?, на 140 км менше		3 год

- Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?
- Чи треба розв'язувати цю задачу? Що треба виправити?

Розв'язання.

1) $5 - 3 = 2$ (год) — на стільки менше часу була в дорозі вантажна машина, ніж легкова; *різниця часу.*

2) $140 : 2 = 70$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$) — швидкість; *однакова величина.*

3) $70 \cdot 5 = 350$ (км) — відстань, яку пододала легкова машина.

4) $70 \cdot 3 = 210$ (км) — відстань, яку пододала вантажна машина.

Відповідь: легкова машина пододала 350 км, а вантажна — 210 км.

2.2. Задачі, в яких однаковою є величина однієї одиниці, а шуканими – два значення кількості або часу.

2.2.1. Знаходження різницевого відношення кількості, включення його в задачу і вимога знайти значення кількості для кожного з двох випадків.

Як і задачі на пропорційне ділення, задачі на знаходження невідомого за двома різницями теж можуть бути двох видів, які відрізняються двома останніми діями: I вид — дією множення, II вид — дією ділення.

Перетворимо останню задачу на задачу II виду:

- Скільки годин була в дорозі легкова машина?
- Скільки годин була в дорозі вантажна машина?
- Яка машина рухалася довше? На скільки?
- Яку відстань проїхала легкова машина?
- Яку відстань проїхала вантажна машина?

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
Л.	350 км	?, однакова	?, на 2 год більше
В.	210 км		?

Задача 3. Легкова і вантажна машини рухалися з однаковою швидкістю. Легкова машина пододала 350 км, а вантажна 210 км. Скільки годин була в дорозі кожна машина, якщо легкова машина рухалася на 2 години довше?

— До якого виду відноситься ця задача? (Ця задача розглядає два випадки: рух легкової й вантажної машин; містить три взаємо-

пов'язані величини: відстань, швидкість і час, причому швидкість є однаковою для легкової та вантажної машини. Дано числові значення відстані і для легкової, й для вантажної машини, а числові значення часу руху і легкової, і вантажної машини є шуканими, але дано значення різниці часу. Це задача на знаходження невідомих за двома різницями.)

— За яким планом розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями? Розкажіть план розв'язання цієї задачі.

Розв'язання.

- 1) $350 - 210 = 140$ (км) — на стільки більше кілометрів пододала легкова машина, ніж вантажна; *різниця відстаней.*
- 2) $140 : 2 = 70$ $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ — швидкість; *однакова величина.*
- 3) $350 : 70 = 5$ год — час руху легкової машини.
- 4) $210 : 70 = 3$ год — час руху вантажної машини.

Відповідь: легкова машина була в дорозі 5 год, а вантажна — 3 год.

— Порівняйте розв'язання цієї задачі й попередньої. Що в них спільного? Чим вони відрізняються?

Діти встановлюють, що перші дві дії однакові: віднімання та ділення; а відрізняються ці задачі останніми двома діями: в попередній задачі це були дії множення, а в даній — ділення. Вчитель ще раз наголошує: щоб розрізнити задачі на знаходження невідомих за двома різницями, слід домовитися вважати задачі, в яких дві останні дії множення, задачами I виду, а задачі, в яких дві останні дії ділення, — задачами II виду.

— Зіставимо задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями. Що в них спільного? Чим вони відрізняються?

У цих задачах спільним є те, що розглядаються два випадки, є три взаємопов'язані величини і одна величина є однаковою для обох випадків; дано два числові значення однієї з величин. В задачах на знаходження четвертого пропорційного дано одне числове значення другої величини, а інше є шуканим; а в задачах на пропорційне ділення або знаходження невідомих за двома різницями — для другої величини дано лише значення суми або різниці, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення або знаходження невідомих за двома різницями — два (рис. 25).

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

	I вид				II вид			
Задачі на знаходження четвертого пропорційного		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
	I	<input type="checkbox"/>	?, одна-	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна-	<input type="checkbox"/>
	II	?	кова	<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>	кова	?
Задачі на знаходження четвертого пропорційного		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
	I	?	?, одна-	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна-	?
	II	<input type="checkbox"/>	кова	<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>	кова	<input type="checkbox"/>
Задачі на пропорційне ділення		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
	I	?	?, одна-	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна-	?
	II	?			II	<input type="checkbox"/>	кова	?
Задачі на знаходження невідомих за двома різницями		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
	I	?	?, одна-	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	одна-	?
	II	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)			II	<input type="checkbox"/>		кова
		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
	I	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	?, одна-	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна-	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)
	II	?			II	<input type="checkbox"/>		кова

Рис. 25. Опорні схеми задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Спільні істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення і задач на знаходження невідомих за двома різницями:

1. Три взаємопов'язані величини.
2. Два випадки.
3. Величина одиниці виміру або лічби є однаковою для обох випадків.
4. Для однієї величини дано два числові значення.

Відмінні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення і задач на знаходження невідомих за двома різницями:

Задачі на знаходження четвертого пропорційного	Задачі на пропорційне ділення	Задачі на знаходження невідомих за двома різницями
Дано одне числове значення іншої величини, а друге є шуканим	Для іншої величини обидва числові значення є шуканими, але дано їх	
	суму	різницю

2.2.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Змініть величини в задачі 3 (с. 103), а числові дані залишіть тими самими.

	Загальна маса (кг)	Маса 1 мішка (кг)	Кількість мішків (шт.)
К.	350 кг	?, однакова	?, на 2 шт. більша
Ц.	210 кг		?

Задача. В магазин привезли 350 кг картоплі та 210 кг цибулі в однакових мішках. Скільки мішків картоплі і скільки мішків цибулі привезли у магазин, якщо мішків з картоплею було на 2 більше?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

— Чи треба розв'язувати цю задачу? (*Ні, розв'язання її вже записано. Треба виправити пояснення до арифметичних дій.*)

— Що ми знайшли першою дією? (*Значення різниці загальних мас — значення другої різниці.*)

— Що ми знайшли другою дією? (*Масу 1 мішка — значення однакової величини.*)

— Що ми узнали третьою дією? (*Ми узнали кількість мішків з картоплею — відповіли на перше запитання задачі.*)

— Що ми узнали четвертою дією? *(Ми узнали кількість мішків із цибулею — відповіли на друге запитання задачі.)*

— Як перевірити правильність розв'язання цієї задачі?

2.2.3. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

— Змінимо числові дані задачі, а величини залишимо тими самими. Складіть задачу за таблицею:

	Загальна маса (кг)	Маса 1 мішка (кг)	Кількість мішків (шт.)
К.	400 кг	?, однакова	?, на 4 шт. більша
Ц.	200 кг		?

— Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі?

— Розкажіть план розв'язання цієї задачі. Запишіть розв'язання задачі.

— Порівняйте цю задачу з попередніми. Чим вони відрізняються? *(Вони відрізняються групами величин і числовими даними та даними різницями: в задачах першого виду дано значення різниці загальної величини, а самі ці значення є шуканими; в задачах другого виду дано різницю кількості або часу, і вони є шуканими.)*

— Що в них спільного? *(Кожна задача розглядає по два випадки (сині й чорні стержні, I і II туристи, легкова і вантажна машини, картопля й цибуля...), містить три взаємопов'язані величини (вартість, ціна та кількість; відстань, швидкість і час; загальна маса, маса 1 мішка та кількість...), одна з яких є однаковою для обох випадків (ціна; швидкість; маса 1 мішка); стосовно однієї з величин дано числові значення для кожного випадку, а стосовно іншої — числові значення для кожного випадку є шуканими, але дано їх різницю.)*

— Усе це задачі на знаходження невідомих за двома різницями. У чому ключ до розв'язання таких задач? *(Ці задачі містять однакошу величину, тому ключем до їх розв'язання є знаходження цієї однакової величини.)* Як ми знаходили однакошу величину? *(Ми знаходили однакошу величину за двома різницевиими відношеннями значень величин.)*

— За яким планом ми розв'язували задачі на знаходження невідомих за двома різницями?

— Узагальнимо плани розв'язання задач I та II виду на знаходження невідомих за двома різницями.

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями							
I вид				II вид			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	?, одна- кова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна- кова	?
II	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	?, одна- кова	<input type="checkbox"/>	I	<input type="checkbox"/>	?, одна- кова	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)
II	?		<input type="checkbox"/>	II	<input type="checkbox"/>		?

План розв'язання:

- 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин;
- 2) знаходимо значення однакової величини за різницею відношеннями двох величин;
- 3) знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 26. Опорні схеми та план розв'язання двох підвидів задач на знаходження невідомих за двома різницями (однаковою є величина однієї одиниці)

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці:

- 1) містять три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядають два випадки;
- 3) значення величини однієї одиниці є однаковим для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини для кожного випадку;
- 5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх різницеве відношення.

2.3. Задачі, в яких однаковою є величина кількості або часу, а шуканими — два значення величини однієї одиниці.

2.3.1. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

Задача. Для вікторини купили заохочувальні призи: набори фломастерів та олівців за однаковою ціною. За олівці сплатили 60 грн, а за фломастери 84 грн. Скільки купили наборів олівців та фломастерів окремо, якщо наборів фломастерів купили на 2 більше?

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
О.	60 грн	?, однакова	?
Ф.	84 грн		?, на 2 шт. більше

— До якого виду відноситься ця задача?

— Як розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями?

— Розкажіть план розв'язання цієї задачі.

Задача 4. Купили однакову кількість наборів фломастерів та олівців. За олівці заплатили 60 грн, а за фломастери 84 грн. Яка ціна набору олівців і набору фломастерів окремо, якщо ціна фломастерів на 2 грн більше?

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
О.	60 грн	?	?, однакова
Ф.	84 грн	?, на 2 грн більше	

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що в них спільного? Чим вони відрізняються? *(Спільне те, що в цих задачах розглядається одна й та сама ситуація: купівля наборів фломастерів та олівців, тому однакові й ключові слова та величини: вартість, ціна і кількість.*

Спільним є й те, що в обох задачах подано числові значення вартості й олівців, і фломастерів. Ці задачі відрізняються тим, що в них різна однакова величина: в попередній задачі це ціна, а в даній задачі — кількість. Крім того, дано різницю різних величин: в попередній задачі було дано різницю кількостей, а в цій — різницю в ціні.

Але кожна із задач розглядає два випадки і містить три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова для обох випадків; причому дані два значення однієї з величин та різниця між значеннями іншої величини, і саме обидва значення цієї величини є шуканими. Це задачі на знаходження невідомих за двома різницями.)

— За яким планом розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями?

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (В цій задачі другою також буде різниця вартості, але однакову величину — кількість — будемо знаходити за різницями вартості й ціни.)

— Розкажіть план розв'язання цієї задачі. (Першою дією знайдемо різницю вартості фломастерів і олівців або на скільки більше заплатили за фломастери, ніж за олівці. Другою дією узнаємо однакову величину — кількість. Третьою дією відповімо на перше запитання задачі й дізнаємося про ціну олівців. Четвертою дією відповімо на друге запитання задачі й дізнаємося про ціну фломастерів.)

— Запишіть розв'язання по діях із поясненням.

Розв'язання.

1) $84 - 60 = 24$ (грн) — на стільки більша вартість фломастерів, ніж олівців; друга різниця.

2) $24 : 2 = 12$ шт. — стільки наборів фломастерів або олівців купили.

3) $60 : 12 = 5$ (грн) — ціна набору олівців.

4) $84 : 12 = 7$ (грн) — ціна набору фломастерів.

Відповідь: ціна набору фломастерів — 7 грн, а олівців — 5 грн.

— Виконайте перевірку. ($7 - 5 = 2$ (грн) — на стільки більша ціна фломастерів, ніж олівців.)

2.3.2. Зміна величин задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими числами, що й у задачі 4 (с. 109), але з іншими величинами: відстанню, швидкістю і часом.

— Чи є необхідність розв'язувати цю задачу? Що треба «виправити»?

2.3.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

— Складіть задачу з тими самими величинами, що й у попередній задачі, але з іншими числами за таблицею:

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$)	Час (год)
Л.	450 км	?	?, однакова
В.	750 км	?, на $60 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$ більша	

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що цікавого ви помітили? Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі? (План розв'язання задачі не зміниться.)

— А власне розв'язання? (Не зміняться арифметичні дії, але зміняться числа.)

— Складіть план розв'язання цієї задачі. (Першою дією узнаємо різницю відстаней, які подолали «Таврія» і «Део», або на скільки більше кілометрів проїхала «Део», ніж «Таврія».)

Другою дією знайдемо час руху «Таврії» або «Део». Третьою дією відповімо на перше запитання задачі — узнаємо швидкість «Таврії». Четвертою дією відповімо на друге запитання задачі — знайдемо швидкість «Део».)

— Запишіть розв'язання по діях із поясненням.

Розв'язання.

1) $750 - 450 = 300$ (км) — на стільки більше проїхала «Део», ніж «Таврія»; друга різниця.

2) $300 : 60 = 5$ год — стільки годин рухалася «Таврія» або «Део».

3) $450 : 5 = 90$ ($\frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$) — швидкість «Таврії».

4) $750 : 5 = 150$ ($\frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$) — швидкість «Део».

Відповідь: швидкість «Таврії» $90 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$, а «Део» — $150 \frac{\text{КМ}}{\text{ГОД}}$.

— Чи вплинула зміна величин та числових даних на математичну структуру задачі? На план розв'язання?

— Узагальнимо математичну структуру таких задач і план розв'язання:

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	□	?, на □ б. (м.)	?, однакова	I	□	?	?, однакова
II	□	?		II	□	?, на □ б. (м.)	

План розв'язання:

- 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин — загальної величини;
- 2) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за значеннями різниць двох інших величин;
- 3) знаходимо шукане значення величини однієї одиниці у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення величини однієї одиниці у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 26. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу, а шуканими — значення величин однієї одиниці вимірювання

— Порівняйте цю задачу з попередніми задачами на знаходження невідомих за двома різницями. *(Кожна із задач розглядає два випадки та містить три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова для обох випадків; причому дані два значення однієї з величин та різниця між значеннями іншої величини, і саме обидва значення цієї величини є шуканими.)*

— Чи має значення, яка величина буде однаковою? *(Ні.)*

— Узагальніть математичну структуру задач на знаходження невідомих за двома різницями. *(Задачі на знаходження невідомих за двома різницями розглядають два випадки та містять три взаємопов'язані величини, одна з яких однакова для обох випадків; причому дані два*

значення однієї з величин та різниця між значеннями іншої величини, і саме обидва значення цієї величини є шуканими.)

— Узагальніть план розв’язання задач цього виду арифметичним методом — способом знаходження однакової величини.

План розв’язання задач на знаходження невідомих за двома різницями:

- 1) знаходимо значення другої різниці;
- 2) знаходимо значення однакової величини;
- 3) відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) відповідаємо на друге запитання задачі.

2.4. Задачі, в яких однаковою є величина кількості, а шуканими — два значення загальної величини.

2.4.1. Знаходження різницевого відношення для двох випадків загальної величини, включення його в задачу і вимога знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків.

Задача. Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів на 2 грн вища, ніж ціна яблук. Яка ціна бананів і яблук окремо, якщо за яблука сплатили 14 грн, а за банани 28 грн?

— Запишіть задачу коротко у вигляді таблиці.

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	28 грн	?, на 2 грн більша	?, однакова
Я.	14 грн	?	

— Порівняйте цю задачу з попередніми. (Ця задача на знаходження невідомих за двома різницями.)

— Розкажіть план розв’язання задачі. (Першою дією дізнаємося, на скільки більше заплатили за банани, ніж за яблука, — знайдемо другу різницю. Другою дією узнаємо однакову величину — кількість бананів або яблук. Третьою дією відповімо на перше запитання задачі й узнаємо ціну бананів. Четвертою дією відповімо на друге запитання задачі — знайдемо ціну яблук.)

Розв’язання.

1) $28 - 14 = 14$ (грн) — на стільки більше заплатили за банани, ніж за яблука; друга різниця.

2) $14 : 2 = 7$ кг — стільки бананів або яблук купили; *однакова величина.*

3) $28 : 7 = 4$ (грн) — ціна бананів.

4) $14 : 7 = 2$ (грн) — ціна яблук. (Або: 4) $4 - 2 = 2$ (грн).)

Відповідь: ціна бананів 4 грн, ціна яблук — 2 грн.

— На скільки більше заплатили за банани, ніж за яблука?

Задача 5. Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів — 4 грн, ціна яблук — 2 грн. За банани сплатили на 14 грн більше, ніж за яблука. Скільки сплатили за яблука і скільки за банани?

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	?, на 14 грн більша	4 грн	?, однакова
Я.	?	2 грн	

— Порівняйте цю задачу з попередньою. Що цікавого? (*Це перетворена попередня задача.*)

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі? (*Першою дією буде-мо відішукувати не різницю вартостей, а різницю в цінах. Друга дія буде така сама. Але дві останні дії будуть не діями ділення, а діями множення.*)

— Розкажіть план розв'язування задачі. (*Першою дією дізнаємося, наскільки дорожче коштує 1 кг бананів, ніж яблук, — знайдемо другу різницю. Другою дією узнаємо однакову величину — кількість бананів або яблук. Третьою дією відповімо на перше запитання задачі — узнаємо вартість бананів. Четвертою дією відповімо на друге запитання задачі узнаємо вартість яблук.*)

Розв'язання.

1) $4 - 2 = 2$ (грн) — настільки вища ціна бананів, ніж яблук; *друга різниця.*

2) $14 : 2 = 7$ кг — стільки бананів або яблук купили; *однакова величина.*

3) $4 \cdot 7 = 28$ (грн) — вартість бананів.

4) $2 \cdot 7 = 14$ (грн) — вартість яблук. (Або: 4) $28 - 14 = 14$ (грн).)

Відповідь: вартість бананів — 28 грн, а вартість яблук — 14 грн.

2.4.2. Зміна величин задачі й дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

— Змініть величини в задачі 5 (с. 114), а числові дані залишіть тими самими.

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
Д.	?, на 14 км більша	$4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?, однакова
П.	?	$2 \frac{\text{км}}{\text{год}}$	

— Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

— Чи треба розв'язувати цю задачу? (*Ні, розв'язок її вже записаний. Треба виправити пояснення до арифметичних дій.*)

— Що ми знайшли першою дією? (*Значення різниці швидкостей руху дорослого і підлітка — значення другої різниці.*)

— Що ми знайшли другою дією? (*Час руху дорослого або підлітка — значення однакової величини.*)

— Що ми узнали третьою дією? (*Ми узнали відстань, яку подолав дорослий, — відповіли на перше запитання задачі.*)

— Що ми узнали четвертою дією? (*Ми узнали відстань, яку подолав підліток, — відповіли на друге запитання задачі.*)

— Як перевірити правильність розв'язання цієї задачі?

2.4.3. Зміна числових даних задачі й дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

— Замініть у попередній задачі числові дані й складіть задачу за таблицею:

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$)	Час (год)
Д.	?, на 4 км більша	$5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$?, однакова
П.	?	$2 \frac{\text{км}}{\text{год}}$	

— Як ця зміна вплине на план розв'язання задачі? (*План розв'язання задачі не зміниться.*) А власне розв'язання? (*Не зміняться арифметичні дії, але зміняться числа.*)

— Складіть план розв'язання цієї задачі. (*Першою дією знайдемо різницю швидкостей дорослого і підлітка — узнаємо, на скільки більше кілометрів за годину проходить дорослий, ніж підліток. Другою дією узнаємо час руху дорослого або підлітка. Третьою дією відповімо на перше запитання задачі — знайдемо відстань, яку подолав дорослий. Четвертою дією відповімо на друге запитання задачі — знайдемо відстань, яку подолав підліток.*)

— Запишіть розв'язання по діях із поясненням.

Розв'язання.

1) $5 - 3 = 2$ ($\frac{\text{км}}{\text{год}}$) — на стільки більша швидкість дорослого, ніж швидкість підлітка; *друга різниця.*

2) $4 : 2 = 2$ год — стільки часу перебував у русі дорослий або підліток; *однакова величина.*

3) $5 \cdot 2 = 10$ (км) — подолав дорослий.

4) $3 \cdot 2 = 6$ (км) — подолав підліток. (*Або 5) $10 - 4 = 6$ (км).*)

Відповідь: 10 км пройшов дорослий, 6 км пройшов підліток за один і той самий час.

— Чи змінилися математична структура задачі та план її розв'язання від зміни групи величин і числових даних? Узагальніть математичну структуру таких задач:

	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	?	<input type="checkbox"/>	однакова	I	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	<input type="checkbox"/>	однакова
II	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	<input type="checkbox"/>		II	?	<input type="checkbox"/>	

План розв'язання:

- 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин — величини однієї одиниці;
- 2) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за значеннями двох різницевих відношень величин;
- 3) знаходимо шукане значення загальної величини у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
- 4) знаходимо шукане значення загальної величини у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі

Рис. 27. Опорні схеми та план розв'язання задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу, а шуканими є числові значення загальної величини

Задачі на знаходження значень величини однієї одиниці				Задачі на знаходження значень загальної величини			
	Загальна	Одиниця	Кількість (або час)		Загальна	Одиниця	Кількість (або час)
I	<input type="checkbox"/>	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	?, однакова	I	?	<input type="checkbox"/>	?, однакова
II	<input type="checkbox"/>	?		II	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	<input type="checkbox"/>	
	Загальна	Одиниця	Кількість (час)		Загальна	Одиниця	Кількість (час)
I	<input type="checkbox"/>	?	?, однакова	I	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)	<input type="checkbox"/>	?, однакова
II	<input type="checkbox"/>	?, на <input type="checkbox"/> б. (м.)		II	?	<input type="checkbox"/>	
<p>План розв'язання:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин; 2) знаходимо значення однакової величини — кількості або часу — за значеннями двох різниць; 3) знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі 							

Рис. 28. Опорні схеми та плани розв'язання задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу

— Порівняйте задачі на знаходження значень величини однієї одиниці і задачі на знаходження значень загальної величини за сталої кількості. Чим вони відрізняються? (У цих задачах однаковою величиною є кількість або час, але в задачі 4 шуканими були значення величини однієї одиниці, а в задачі 5 — значення загальної величини.)

— Як у зв'язку із цим змінюється план розв'язання задачі? (Першою дією ми знаходимо різницю двох числових даних, але це різні різниці;

другою дією знаходимо значення однакової величини, а третьою та четвертою діями відповідаємо на запитання задачі, але це різні запитання.)

— Узагальніть план розв'язання цих задач (див. рис. 28 на с. 117).

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу:

- 1) містять три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядають два випадки;
- 3) значення величини кількості або часу є однаковим для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини для кожного випадку;
- 5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.

— Порівняйте цю задачу з попередніми задачами на знаходження невідомих за двома різницями. Що в них спільного? *(Кожна із задач розглядає два випадки та містить три взаємопов'язані величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; причому дано два значення однієї з величин та різниця між значеннями іншої величини, і саме обидва значення цієї величини є шуканими.)*

— Чи має значення, яка величина буде однаковою? *(Ні.)*

— Чи має значення, різницю якої величини буде дано в умові: чи різницю загальної величини, чи різницю величини однієї одиниці, чи різницю кількості або часу? *(Ні.)*

— Узагальніть математичну структуру задач на знаходження невідомих за двома різницями.

— Узагальніть план розв'язання задач цього виду арифметичним методом — способом знаходження однакової величини (рис. 29).

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці або кількості чи часу:

- 1) містять три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядають два випадки;
- 3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї величини для кожного випадку;
- 5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.

2.4.4. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина.

Задача. Купили 5 чайних сервізів та 3 сервізи для кави за однаковою ціною. За чайні сервізи заплатили на 192 грн більше, ніж за сервізи для кави. Скільки заплатили за чайні сервізи і за сервізи для кави окремо?

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
Ч.	?, на 192 грн більша	?, однакова	5 шт.
К.	?		3 шт.

Розв'язання.

1) $5 - 3 = 2$ (шт.) — на стільки більше купили чайних сервізів, ніж сервізів для кави; *друга різниця.*

2) $192 : 2 = 96$ (грн) — ціна чайного сервізу або сервізу для кави, *однакова величина.*

3) $96 \cdot 5 = 480$ (грн) — вартість чайних сервізів.

4) $96 \cdot 3 = 288$ (грн) — вартість сервізів для кави.

Відповідь: чайні сервізи коштують 480 грн та сервізи для кави — 288 грн.

— Припустімо, що вартість чайних сервізів і сервізів для кави однакова. Залишимо тими самими значення кількості. Як це вплине на ціну? (*Ціна сервізів буде різною. Причому якщо кількість чайних сервізів більша, то ціна має бути меншою.*)

Задача 6. П'ять чайних сервізів коштують стільки ж, скільки три сервізи для кави. Яка ціна чайного сервізу і сервізу для кави окремо, якщо ціна чайного сервізу на 22 грн нижча, ніж ціна сервізу для кави?

— Запишіть задачу коротко у вигляді таблиці:

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
Ч.	?, однакова	?, на 22 грн менше	5 шт.
К.		?	3 шт.

— Цю задачу розв'язати арифметичним методом не можна.

Корисно порівняти математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями.

— Що спільного у задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями? Зіставте узагальнені математичні структури задач та узагальніть істотні ознаки цих типів задач.

— За яким планом розв'язуються задачі на знаходження четвертого пропорційного?

— На пропорційне ділення?

— На знаходження невідомих за двома різницями?

— Порівняйте плани розв'язання цих типів задач та узагальніть спосіб їх розв'язання.

І нарешті, можна запропонувати учням зіставити узагальнені математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями з метою узагальнення істотних ознак цих типів задач та способу їх розв'язання (рис. 29).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями:

- 1) містять три взаємопов'язані величини;
- 2) розглядають два випадки;
- 3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
- 4) дано два числові значення однієї з величин для обох випадків;
- 5) для другої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим, або обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму або різницю.

Також можна узагальнити план розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями способом знаходження однакової величини:

1. Знаходимо однакову величину за двома числовими значеннями стосовно одного з випадків або за двома сумами або різницями.
2. Відповідаємо на запитання задачі.

3. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями.

Учні аналізують математичну структуру задачі, «впізнають» її, згадують узагальнений план розв'язання задач такого типу і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити перетворенню задачі одного виду на задачу іншого виду, перетворенню задачі на знаходження невідомих за двома різницями на задачу на пропорційне ділення або на знаходження четвертого пропорційного. На цьому етапі пропонуємо учням задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є кількість або час.

<p style="text-align: center;">Задачі на знаходження четвертого пропорційного</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>I</td> <td>a</td> <td rowspan="2">?, однакова</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>II</td> <td>c</td> <td>?</td> </tr> </tbody> </table>					I	a	?, однакова	b	II	c	?	<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо значення однакової величини за двома числовими значеннями одного з випадків; 2) знаходимо шукане значення, відповідаємо на запитання задачі
I	a	?, однакова	b									
II	c		?									
<p style="text-align: center;">Задачі на пропорційне ділення</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>I</td> <td>a</td> <td rowspan="2">?, однакова</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>II</td> <td>c</td> <td>?</td> </tr> </tbody> </table>					I	a	?, однакова	?	II	c	?	<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо суму даних числових значень однієї з величин; 2) знаходимо значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин; 3) знаходимо шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі
I	a	?, однакова	?									
II	c		?									
<p style="text-align: center;">Задачі на знаходження невідомих за двома різницями</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>I</td> <td>a</td> <td rowspan="2">?, однакова</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>II</td> <td>c</td> <td>?, на k б. (м.)</td> </tr> </tbody> </table>					I	a	?, однакова	?	II	c	?, на k б. (м.)	<p>План розв'язання (спосіб знаходження однакової величини):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин; 2) знаходимо значення однакової величини за двома різницями; 3) знаходимо шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі; 4) знаходимо шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі
I	a	?, однакова	?									
II	c		?, на k б. (м.)									

Рис. 29. Опорні схеми та плани розв'язання задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

Таким чином, запропонована методика навчання молодших школярів розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями має такі складові:

1. Для усвідомлення учнями зв'язку між задачами на знаходження невідомих за двома різницями і задачами на пропорційне ділення, їх порівняння ми пропонуємо їм перетворити задачу на пропорційне ділення (однакова величина — величина 1 одиниці) на задачу на знаходження невідомих за двома різницями, причому спочатку отримати задачу першого виду, а потім другого.

2. Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями здійснюється шляхом зміни однакової величини і вивчення впливу цієї зміни на план розв'язання задач.

3. Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями здійснюється на основі перетворення задачі одного виду на задачу іншого виду.

4. Працюючи над кожною задачею «зі зміненою однаковою величиною», учні досліджують вплив зміни величин задачі та числових даних на план її розв'язання.

АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного

Задача. Купили банани й апельсини по однаковій ціні. За 6 кг бананів сплатили 30 грн. Скільки коштує 4 кг апельсинів?

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	30 грн.	?, однакова	6 кг
А.	?		4 кг

— Позначаємо шукану величину — вартість апельсинів — змінною, наприклад — x .

Записуємо вираз для знаходження однакової величини для першого випадку: $30 : 6$ (щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість).

Виражаємо однакову величину для другого випадку через змінну: $x : 4$.

	Загальна вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (кг)
Б.	30 грн	$30 : 6$	6 кг
А.	?	$x : 4$	4 кг

Прирівнюємо вирази, через які подано однакову величину в кожному з двох випадків, й одержуємо рівняння $30 : 6 = x : 4$.

Переставляємо ліву та праву частину рівняння: $x : 4 = 30 : 6$.

Знаходимо значення частки у правій частині рівняння: $x : 4 = 5$.

Розв'язуємо простіше рівняння:

$$x = 5 \cdot 4$$

$$x = 20$$

Відповідь: 20 грн коштує 4 кг апельсинів.

2. Задачі на пропорційне ділення.

Задача. За два дні на базу привезли 95 т вугілля. В перший день привезли 2 вагони, а в другий день — 3 вагони. Скільки тонн вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона	Кількість (шт.)
I	2 шт.	?, однакова	?
II	3 шт.		?

— Маса 1 вагона однакова для обох випадків, тому позначимо її літерою — x . Виражаємо загальну масу в першому випадку через змінну.

Відомо, що в перший день привезли 2 вагони, тому загальна маса вугілля, що привезли у перший день буде $x \cdot 2$.

Виражаємо загальну масу в другому випадку через змінну: загальна маса вугілля, що привезли у другий день буде $x \cdot 3$.

Записуємо виразом суму загальних мас в обох випадках — скільки всього за два дні привезли вугілля: $x \cdot 2 + x \cdot 3$.

Звертаємось до умови: за умовою всього за два дні привезли 95 т вугілля. Отже, з одного боку, за два дні привезли всього вугілля $x \cdot 2 + x \cdot 3$, а з іншого — 95. Прирівнюємо вираз і число й складаємо рівняння:

$$x \cdot 2 + x \cdot 3 = 95$$

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона	Кількість (шт.)
I	2 шт.	однакова, x	$x \cdot 2$
II	3 шт.		$x \cdot 3$

} 95 шт.

Застосовуючи розподільний закон множення відносно додавання справа наліво: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, маємо:

$$(2 + 3) \cdot x = 95$$

$$5 \cdot x = 95$$

$$x = 95 : 5$$

$$x = 19$$

Отже, маса 1 вагона — 19 т.

$19 \cdot 2 = 38$ (т) — загальна маса вугілля, яку привезли в перший день.

$19 \cdot 3 = 57$ (т) — загальна маса вугілля, яку привезли в другий день.

Зробимо перевірку розв'язання задачі:

$$38 + 57 = 95 \text{ (т)} \text{ — що відповідає умові задачі.}$$

Рівняння можна скласти інакше.

— Маса 1 вагону однакова для обох випадків, тому позначимо її літерою — x .

Виражаємо суму кількості вагонів для першого і другого випадків через змінну — $95 : x$.

Відомо, що в перший день привели 2 вагони, а у другий — 3. Записуємо виразом суму кількостей вагонів: $2 + 3$.

Отже, з одного боку, за два дні привезли $2 + 3$ вагони з вугіллям, а з другого — $95 : x$.

$$\text{Складаємо рівняння: } 95 : x = 2 + 3.$$

	Кількість вагонів (шт.)	Маса 1 вагона	Кількість (шт.)
I	2 шт.	однакова, x	$95 : x$
II	3 шт.		

} $(2 + 3)$ шт.

Порівнюючи два способи складання рівняння, приходимо до висновку, що ключем до складання рівняння до задач на знаходження четвертого пропорційного є позначення однакової величини змінною.

3. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями.

Задача. Хлопчик купив 7 аркушів паперу, а дівчинка — 11. Дівчинка заплатила на 12 коп. більше, ніж хлопчик. Скільки заплатила дівчинка і скільки хлопчик?

— Розглянемо розв'язання.

Візьмемо ціну аркуша паперу за x .

Дівчинка купила паперу більше, ніж хлопчик, на 4 аркуші: $11 - 7 = 4$, тому вона заплатила більше на $x \cdot 4$ коп. Дівчинка заплатила більше хлопчика на 12 коп.

$$x \cdot 4 = 12$$

$$x = 12 : 4$$

$$x = 3 \text{ (коп.)}$$

Ціна одного аркуша паперу — 3 коп. Вартість 7 листів — 21 коп. ($3 \cdot 7 = 21$). Вартість 11 листів — 33 коп. ($3 \cdot 11 = 33$).

Рівняння можна скласти і так: дівчинка купила на 11 – 7 аркушів більше, ніж хлопчик; ціна аркуша — x , тому $x \cdot (11 - 7) = 12$, оскільки дівчинка сплатила більше, ніж хлопчик, на 12 коп.

Розглянемо ще один шлях складання рівнянь до цієї задачі. Позначимо ціну аркуша паперу як x . Оскільки дівчинка сплатила на 12 коп. більше, ніж хлопчик, то, значить, вона купила на $12 : x$ аркушів більше, ніж хлопчик.

За умовою задачі відомо, що дівчинка купила більше, ніж хлопчик, на 11 – 7 аркушів. Обидва ці вирази рівні, тому запишемо рівняння:

$$12 : x = 11 - 7.$$

Складемо задачу за таблицею:

	Загальна маса піску (т)	Маса піску в 1 машині (т)	Кількість рейсів
I	40 т	?, однакова	?
II	60 т		?, на 1 б.

— Маса піску, який перевозять однією машиною і в першому, і у другому випадках, — однакова. Позначимо змінною однакою величину: x — маса піску в 1 машині.

Через змінну виразимо значення різниці загальних величин: $1 \cdot x$ — на стільки більше піску перевезли на другій машині, ніж на першій.

Виразимо різницю значень загальних величин іншим чином: $60 - 40$ — на стільки більше піску перевезли на другій машині, ніж на першій машині.

Прирівняємо вирази, що позначають різницю значень загальних величин. Складемо рівняння.

$$1 \cdot x = 60 - 40$$

$$1 \cdot x = 20$$

$$x = 20 : 1$$

$x = 20$ — стільки тонн піску перевозили в одній машині.

Дамо відповіді на запитання задачі:

1) $40 : 20 = 2$ — стільки рейсів зробила перша машина.

2) $60 : 20 = 3$ — стільки рейсів зробила друга машина.

Сюжетні задачі, що містять сталу величину

Зробимо перевірку розв'язання задачі.

$3 - 2 = 1$ (р.) — на стільки більше рейсів зробила друга машина, ніж перша.

Рівняння можна скласти інакше, але таке рівняння є складним для учнів початкових класів.

	Загальна маса піску (т)	Маса піску в 1 машині (т)	Кількість рейсів
I	40 т	однакова, x	$40 : x$ ← на 1
II	60 т		$60 : x$ ←

$60 : x - 40 : x = 1$ — застосуємо правило ділення різниці на число в оберненому напрямку:

$$(60 - 40) : x = 1$$

$$20 : x = 1$$

$$x = 20 : 1$$

$$x = 20$$

Співставляючи способи складання рівнянь для розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями, приходимо до висновку, що в усіх випадках через змінну слід позначити значення однакої величини.

Навчальне видання

Бібліотека «Шкільного світу»

СКВОРЦОВА Світлана Олексіївна

**Сюжетні задачі,
що містять сталу величину
3—4 класи**

*На обкладинці використано
фрагмент картини Олени Міроседіної
www.mirosedina.com*

Формат 60×84/16.

Умовн. друк. арк. 7,44. Тираж 1000 пр.

Зам.

ТОВ «Редакції газет з дошкільної та початкової освіти»
01014, Київ, вул. Тимірязєвська, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК № 779 від 21.01.2002

Видруковано з готових діапозитивів в ОП «Житомирська облдрукарня»
10014, Житомир, вул. Мала Бердичівська, 17

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ЖТ № 1 від 06.04.2001